DOI: 10.15773/EKE.HABIL.2019.003

A matematika és ezen belül a geometria oktatásának a helyzete a Szlovákiai iskolarendszerben

Habilitációs értekezés

Csiba Peter

Neveléstudományi Doktori Iskola
Eszterházy Károly Egyetem
Eger
2019

A matematika és ezen belül a geometria oktatásának a helyzete a Szlovákiai iskolarendszerben

Csiba Peter

2019. június 17.

Tartalomjegyzék

Bevezetés **3**

I. A szlovákiai matematika oktatás kerete, az e területen végzett felmérések és azok kiértékelése **6**

1. A matematika-tanítás óraterjedelmének, tölteteinek és követelményeinek a változása a szlovákiai iskolareformok következtében **7**
1.1. A Szlovák Köztársaság közoktatási rendszerének legiszlatív (jogi) kerete 7
1.2. A matematika-tanítás óraterjedelmének, töltetének és követelményeinek változása a szlovákiai iskolareformok következtében 9
1.2.1. A matematika tantárgy előírt időkeretének alakulása 9
1.2.2. Az előírt tananyag tartalmi követelményeinek változása 14
1.3. A geometria tananyaga változásának részletes elemzése 32
1.3.1. Gondolatok a geometria oktatásának módszertani kérdéseihez 32
1.3.2. A geometria tananyag összevetése a szlovákiai közoktatás változásaiban . 34

2. A szlovákiai matematikai ismeretek hazai és nemzetközi méréseinek eredményei **46**
2.1. Hazai mérések 46
2.1.1. Az alapiskolák alsó tagozatának matematikai ismereteinek tesztelése . . . 46
2.1.2. Az alapiskolák felső tagozatának matematikai ismereteinek tesztelése . . . 50
2.1.3. A középiskolák matematikai ismereteinek tesztelései 58
2.2. Nemzetközi felmérések 63
2.2.1. TIMSS felmérések Szlovákiában 63
2.2.2. PISA felmérések Szlovákiában 64
2.3. A matematikai ismeretek méréseinek elemzése 66
2.3.1. Az alapiskolák alsó tagozatán felmért matematikai ismeretek elemzése . . 67
2.3.2. Az alapiskolák felső tagozatán felmért matematikai ismeretek elemzése . . 86
2.3.3. A középiskolákon felmért matematikai ismeretek elemzése 105

II. A matematika, a geometria oktatásában használható szoftverek **121**

3. A matematikai szoftverek és a matematika oktatásában használható szoftverek rövid történeti áttekintése **122**

4. Szoftverek a szlovákiai oktatási rendszerben **126**

5. Interaktív matematikai szoftverek használata az oktatásban **129**
5.1. A megfelelő szoftver választásának kérdései 129
5.2. Szoftverek használatának lehetőségei a geometria oktatásában 130
5.3. Szoftverek használatának kockázatai a geometria oktatásában 133
5.4. A „csodafegyver” 134

5.5. Az interaktív szerkesztések univerzalitása 135
5.6. A gyakorló feladatok szerepe a matematika és a geometria oktatásában 138
5.7. Automatikusan kiértékelődő geometriai szerkesztési feladatok és azok alkalmazása oktatási keretrendszerekben 140
5.7.1. Automatikusan kiértékelődő applet készítése 141
5.7.2. Az eszköztár testreszabása 142
5.7.3. Véletlenszerű feladatmeghatározás készítése 143
5.7.4. Matematikai házi feladatok kezelésének lehetőségei a Moodle keretrendszerben 144
5.7.5. Az elkészített GeoGebra appletek beágyazása a Moodle keretrendszerbe . 145
5.8. Interaktív tananyagok készítése 146

6. Az oktatás jövője **148**
6.1. A matematika és a geometria oktatásának lehetséges jövője 149
6.1.1. Mit tanítsunk? 151

Befejezés **155**

Bevezetés

Az emberi civilizációk megjelenése az ember mezőgazdasággal való élelemteremtésével kezdődött, amikor a földművelés, a növénytermesztés és az állattartás következtében több élelmet tudtak megtermelni, mint a korábban vadászó, gyűjtögető életmódot folytató őseik. Ez egyrészt a népesség növekedéséhez vezetett, másrészt olyan társadalmi rétegek kialakulását is biztosította, amelyek nem az élelmiszer megtermelésével, raktározásával és elosztásával foglalkoztak elsődlegesen. Mivel a fennmaradás és a fejlődés alapja a (termő)föld megszerzése és megtartása volt, ezért feudális (földesúri) társadalmi berendelkezések alakultak ki és maradtak fenn.

A mezőgazdasági alapú civilizációkat az ipari-technikai forradalom az elmúlt pár száz év alatt fokozatosan felváltotta és ipari alapú (indusztriális) civilizációkat hozott létre. Az ipari civilizáció kulcsát a megtermelt és eladható javak képezték, amihez megfelelő nyersanyagok (kőszén, vas, salétrom, fémek és ásványok, ..., kőolaj, radioaktív elemek, félvezetők) voltak elsődlegesen szükségesek, és ezekért zajlott a verseny. Az iparosítás következtében a mezőgazdasági termelékenység is megnőtt, mára jóval kevesebb ember is képes megtermelni a számunkra szükséges élelmiszer mennyiségét.

A jelenkor gondolkodói azonban már egy újabb korszakalkotó forradalomról, az info-kommunikációs forradalomról beszélnek, ami feltehetően újra gyökeresen alakítja át az emberiség társadalmi struktúráit. Ezen korszak alapját az információ, a tudás képezi.

Nem szokványos kezdet ez egy alapvetően matematika oktatási irányultságú munkához, de úgy gondoljuk, ezzel kellett kezdenünk. Ebben a bővebb általános kontextusban kívánjuk elhelyezni a munkában leírtakat. A történészek elnézését kérjük, hogy az emberi civilizációk történetét három rövid bekezdésbe sűrítettük be.

A matematika történetéből tudjuk, hogy már az őskor vadászainak is hasznára lehettek matematikai ismeretei (pl. el tudta a felderítő mondani a többieknek, hogy hol és mennyi vadat látott), de igazából a matematika a nagy népességű civilizációk (az ókori Mezopotámia és Egyiptom) esetén jelenhetett meg és vált nélkülözhetetlenné (pl. naptárkészítés, adók, földkimérés, építészet, ...). A virágzó civilizációk használták a matematika általuk ismert eszközeit, és új eredményeket is adtak a matematikához. A technikai fejlődés során azonban a kialakuló természettudományok láncolatában a matematika szolgáltatta azt az alapot, ami a bennünket körülvevő világ elveinek leírását szolgálta, és ez a megismerési vágy új matematikai diszciplínák (pl. az infinitezimális számítás) megalapozását hozta magával. Az információs kor tudományát nevezhetjük informatikának. Az informatika alapjai szintén a matematikában találhatók meg. A digitális számítógépek alapját képző Boole-algebra több száz évvel megelőzte az első elektronikus számítógép megjelenését, és kiemelkedő matematikusok (pl. Neumann János, Alan Turing, stb.) alapozták meg e tudományágat.

Remélhetőleg nem szorul alátámasztásra, ha azt mondjuk, hogy a műszaki és természettudományos képzés szükséges feltételének tartjuk a bizonyos szintű matematikai képzettséget. Itt egyrészt elvárjuk azt, hogy a diák a matematika eszköztárát képző bizonyos ismeretekkel (pl. műveletek a valós számkörben, algebra és egyenletek oldása, függvények, ...) rendelkezzen és képes legyen ezek alkalmazására. Másrészt viszont a matematika tantárgytól várjuk el azt is, hogy megtanítson a logikus következtetés, racionális gondolkodás képességére is. Mindezeket összevetve egy indusztriális társadalomban is elengedhetetlen, hogy képzett műszaki és természettudományos szakemberek végezzék és vezessék a fejlesztéseket, ezért szükséges az ő képzésükben a matematikai kompetenciáik fejlesztése is.

A társadalmi-gazdasági történések az elmúlt pár évtizedből is szolgáltatnak pár példát arra, hogy az oktatási rendszer tartalmi-szervezeti beállításával, akár ipari nyersanyagok hiányában is magas hozzáadott értékű, gazdaságilag is sikeres történetek hozhatók létre. Első példánk Tajvan, ami politikailag és gazdaságilag is bonyolult helyzetből úgy talált kiutat, hogy a legtehetségesebb diákjait a világ legjobb egyetemeire küldte el félvezető-elektronikát tanulni. Mára a fogyasztói, szórakoztató elektronikai eszközök jelentősen nagy részét tajvani gyárak gyártják. A másik példánk Finnország, ami csak a 20. században nyerte el függetlenségét. Össznemzeti érdekként határozták meg az oktatásügyet a 2. világháború után, és a bruttó nemzeti össztermék több mint 3%-át az oktatásügybe fektetik. A finn oktatási modellt több helyütt is mintaként hozzák fel. Nem meglepő tehát, hogy a lassan a mindennapjainkat is meghatározó mobiltelefonokat finn ötlet alapján finn vállalatok (Nokia, Ericsson) hozták be a piacra.

Ha azonban a jövőbe tekintünk és az információs kor várható elvárásait igyekeznénk megfogalmazni, azt sem vitatná feltehetően senki sem, hogy az érvényesüléshez kreatív, alkalmazkodni képes, racionális gondolkodású személyekre lesz szükség. Jelenleg is megfigyelhető már, hogy a tárgyi ismeretekhez való könnyebb hozzáférés miatt az analizáló, szintetizáló és problémamegoldási képességek kerülnek előtérbe. Véleményünk szerint a szervezett (köz)oktatás keretein belül a matematika tantárgy oktatása révén van legnagyobb mértékben lehetőség ezen képességek fejlesztésére.

Hogy a jövőre vonatkozóan tervezni tudjunk, ahhoz elengedhetetlen a jelenlegi helyzet felmérése. Az oktatás folyamat lévén nem egy kiragadott pillanatképet, hanem egy időszakot kellene megnéznünk. Ahogy Közép-kelet Európának nagy részében, így nálunk, Szlovákiában is társadalmi, politikai rendszerváltás történt 1989-ben. Úgy gondoltuk, érdemes volna az oktatási rendszert és azon belül a matematika tanítását ezen változásoktól kezdve nyomon követni.

Erről szól ezen dolgozat első része. Bemutatjuk a szlovákiai közoktatás jogi alapjait, a közoktatás rendszerét, a matematika oktatásának kereteit képző előírásokat, a matematika tantárgy előírt terjedelmét, töltetét és követelményeit is, valamint ezek változásait is az elmúlt három évtizedben. Részletesebben foglalkozunk a matematikán belül a geometria tananyagának változásaival és foglalkozunk azzal a kérdéssel is, hogy minek tudható be a geometria, s azon belül a geometriai szerkesztésekkel foglalkozó tanagyagrészek folyamatos háttérbe szorulása (dacára annak gondolkodásfejlesztő hatására).

Az oktatás keretének bemutatása után a szituáció kontextusba helyezésével foglalkozunk: ezt a hazai (szlovákiai) és olyan nemzetközi felmérések eredményeinek bemutatásával tesszük meg, amelyekben a matematikai kompetenciákat, tudásszintet mérték. Szlovákiában az alapiskola alsó tagozata után, és a felső tagozat végén zajlik átfogó, teljes populációt lefedő matematikai felmérés. A középiskola végén az országos felmérés az érettségi vizsga írásbeli része, viszont a matematika nem lévén kötelező érettségi tantárgy, ezért az érettségizőknek cirka csak egy hatoda, hetede, aki részt vesz benne. A nemzetközi vonatkoztatásban a TIMSS és a PISA felmérések Szlovákiára és a matematikai kompetenciák mérésére vonatkozó főbb adatait közöljük, mivel Szlovákia ezen felméréssorozatokba van csak bekapcsolódva, amelyek matematikai ismereteket, kompetenciákat is mérnek.

Ahogyan azt megmutatjuk, a vizsgált időszakban a matematika kötelező óraszámai a közoktatás minden szintjén csökkentek, és a nemzetközi felmérések alapján a vizsgált korosztályokon belül Szlovákia a kétezres évek elején elért átlagtól jobb, vagy átlagos eredményei fokozatosan hátrébb sorolódtak, s az utóbbiak során már az átlagos eredményektől szignifikánsan rosszabbul teljesített. A hazai felmérések közül főként az alsó tagozatos mérések eredményei azonban szinte töretlen javulást mutatnak. Ez egy olyan anomáliának tűnik, amire magyarázatot kellene találnunk, ezért a hazai tesztelésekkel foglalkozunk (azok elérhetőek). Mivel egy mérési eredményt minősíti az, hogy milyen mérőeszközzel lett az végrehajtva, ezért az egyes szintekre vonatkozóan bemutatunk egy-egy, időbeli különbséggel használt tesztet is, amelyeket igyekeztünk össze is hasonlítani. A teszt-párok kiválasztásakor törekedtünk arra, hogy a tesztek formátuma lehetőleg azonos legyen, legyen megíratásuk évei között nagyobb időbeni különbség. A teszt-párok feladatait igyekeztünk objektíven összemérni, és megállapítani, hogy melyik teszt volt igényesebbnek tekinthető. Az egyik (az alsó tagozatos) teszt-pár esetében a tesztek igényességét experimentálisan, nagyobb hallgatói tömeg páros teszt-megíratásával is vizsgáltuk.

Természetesen szlovákiai magyarként a szlovákiai magyarság kisebbségre vonatkozó tényeket, adatokat minden esetben feltüntettük, amennyiben erre vonatkozóan voltak elérhető hivatalos adatok, és megpróbáltuk azokat viszonyítani is a globális országos mutatókhoz.

A helyzetleírást tartalmazó első részt követően a dolgozat második részében egy lehetséges megoldási módszer, a számítógéppel támogatott matematika-, geometria-oktatás kérdéskörét járjuk körbe.

A matematikai szoftverek történetével és kategorizációjával foglalkozó fejezet után a szlovákiai matematikai szoftverhasználati speciálisokat is bemutatjuk.

A matematikai szoftverek oktatásban való használatával foglalkozó fejezetben foglalkozunk azok lehetséges előnyeivel, de nem hallgatjuk el azok használatának potenciális kockázatait, hátrányait sem. A felhasznált „csodafegyver", a GeoGebra felhasználói szintű használatába nem megyünk bele, hiszen az kellően jól dokumentált, de a szoftverek által biztosított interaktivitás mellett a geometriai szerkesztések univerzalitásának kialakítását is vizsgáljuk. A feladatmegoldások gyakorlásának lehetőségeként bemutatjuk azt is, hogy miképpen tudunk automatikusan kiértékelődő matematikai feladatokat tartalmazó appleteket készíteni, és hogyan tudjuk azokat elektronikus tananyagokba gyakorló feladatként, vagy oktatástámogató keretrendszerekbe automatizáltan értékelődő házi feladatokként beágyazni.

Természetesen nincsenek hamis illúzióink, a számítógépek és megfelelő szoftverek alkalmazása sem „váltja meg" a matematika oktatását, de egy jól felkészült matematikatanár számára hasznos segédeszközök tudnak lenni az oktatás egyes fázisainak (pl. szemléltetés, ötletek és hipotézisek verifikációja, heurisztikus megoldáskeresés, gyakorlás, ...) bebiztosításában, hatékonyabbá tételében. Úgy gondoljuk, a bemutatott elvek és fogalmak megfelelő alapot tudnak nyújtani oktatástámogató elektronikus tananyagok létrehozásához a matematika és azon belül a geometria szerkesztési témaköreihez, amelyek ez idáig a jelen környezetben a szlovákiai magyar tannyelvű iskolák számára nem állnak rendelkezésre.

Mivel Szlovákiában az egyetemi képzésekben részt vevő hallgatóknak alig több mint fél százaléka tanul valamilyen matematika tudományos szakon, és a tanárképzésben jelenleg tanulóknak is csak cca. másfél százaléka tanul (szakpárosításban) matematikát (ezen információk forrása a felsőoktatási költségvetés 2019-es évi szétosztásának alapjait tartalmazó táblázatok: https://www.minedu.sk/data/att/14160.xlsx), ezért törekednünk kell arra, hogy az a kevés matematikatanár tudományosan (matematikából) és szakmailag (annak módszertanából) is jó képzésben részesüljön, hiszen azok nélkül nem lesz színvonalas matematikaoktatás a közoktatásban sem.

I. rész

A szlovákiai matematika oktatás kerete, az e területen végzett felmérések és azok kiértékelése

1. fejezet

A matematika-tanítás óraterjedelmének, töltetének és követelményeinek a változása a szlovákiai iskolareformok következtében

Az alábbiakban a rendszerváltás óta eltelt közel három évtized szlovákiai közoktatásában lezajlott változásokat, és azok hatásait kívánjuk bemutatni. A Csehszlovák Szocialista Köztársaság a rendszerváltást követően Cseh (és) Szlovák Föderatív Köztársasággá alakult majd annak 1993 január 1.-hez számított szétválásával jött létre az önálló Szlovák Köztársaság. Ez időszakban több változás is történt, amelyek természetesen hatással voltak a matematika oktatásának körülményeire, feltételeire és követelményeire is.

1.1. A Szlovák Köztársaság közoktatási rendszerének legiszlatív (jogi) kerete

A Szlovák Köztársaság (Szlovákia) iskolarendszere közoktatását (általános- és középiskolai rendszerét) legfelsőbb jogi szinten törvénnyel szabályozták. Szlovákia a jogelődjétől, a Cseh és Szlovák Föderatív Köztársaságtól örökölte meg és vette át az iskolarendszert szabályozó 29/1984 számú Iskolatörvényét (Zákon č. 29/1984 Zb. o sústave základných a stredných škôl (školský zákon), forrás : http://www.zakonypreludi.sk/zz/1984-29) , amit Szlovákia 1993-as különválását, megalakulását követően 14 alkalommal módosítottak 2008-ig.

Az alap- (általános) iskolai belépő korhatár (tankötelezettség) iskolaérettségtől függően attól a tanévtől kezdődik, amikor a gyermek betölti 6 éves korát. Az egyik legjelentősebb változás az volt, hogy az alapiskola a törvény 1991 júniusában elfogadott módosításáig 8 évfolyamos volt, azt követően 9 évfolyamos lett. A átmeneti időszakban (akik még 8-éves alapiskolai képzésben kezdték meg tanulmányaikat), akik sikeresen felvételt nyertek valamely középiskolába a 8. évfolyam végén, azok megkezdhették középiskolai tanulmányaikat, akik viszont nem, azok csak a 9. évfolyam után kerültek középiskolába. Az alapiskola első négy évfolyamát alsó tagozatnak nevezték, az azt követő 4, illetve később 5 évfolyamot az alapiskola felső tagozatának. A kötelező iskolalátogatás 10 évben volt megszabva.

A középiskolák rendszerébe gimnáziumok (gymnázium), szakközépiskolák (stredná odborná škola), konzervatóriumok (konzervatórium) és középfokú szaktanintézetek (stredné odborné učilište) tartoztak. A gimnáziumok 1990-ig négy-évfolyamosak voltak, ezt követően lehetséges lett nyolcéves gimnáziumi képzés is, ami tulajdonképpen az alapiskola felső tagozatát és a gimnáziumot (ennek tananyagát) kapcsolta egybe. A szakközépiskolák szintén általában 4 éves képzést biztosítottak. A gimnáziumok és a szakközépiskolák sikeresen érettségi vizsgával fejeződtek be. A középfokú szaktanintézetek általában hároméves voltak és a sikeres teljesítése esetén tanonclevelet (výučný list) adtak a végzetteknek, de egyes szakokon 4 éves képzés zajlott és a sikeres végzettek érettségiztek. Az iskolarendszer jogi keretének és a gazdasági, társadalmi helyzet változásai is egy új fenomén, az ún. egyesített középiskola típusának (združená stredná škola) megjelenést hozta, ami általában több középiskola egyesítéseként jött létre.

Az iskolaügy azon területein, amelyeket a törvény nem szabályozott, ám melyeket az államigazgatás szabályozni kívánt (például a középiskolai felvételik módja, vagy egyes középiskolatípusok sikeres befejezésének feltételei, ...), alacsonyabb jogi normákkal: kormányrendeletekkel (Nariadenie vlády Slovenskej republiky) és valamelyik minisztérium által kiadott rendeletekkel (Vyhláška) határozták meg.

Az Oktatási Minisztérium jóváhagyásával kiadásra kerültek a *tantervek* (Učebné plány), amelyek kötött rendszerben határozták meg az egyes iskolatípusok, azon belül az egyes variánsok, specializációk (pl. alapváltozat, matematikai és természettudományos-, nyelvi-, zenei-, stb. osztályok) számára, hogy az egyes évfolyamokban mely tantárgyból heti hány óra terjedelemben kell az egyes tantárgyakat tanítani.

Ezen jogi keretben központilag, az Oktatási Minisztérium végzéseként kerültek kiadásra az egyes tantárgyakból az egyes iskolai szintek, iskolatípusok és variánsok számára az ún. *tanmenetek* (učebné osnovy). A tantárgy tanmenete meghatározta annak céljait és tartalmát. Tartalmi téren az egyes évfolyamokra meg volt határozva az órakeret, azon belül az alaptananyag (témakörönkénti óraterheléssel), valamint az ajánlott kiegészítő tananyag témakörei is. Az egyes témaköröknek az óraterhelés mellett meg voltak határozva a céljai és a tartalma is.

A tanmenetek mellett az Állami Pedagógiai Intézet kiadásában közzé lettek téve az egyes tantárgyakhoz a Központi Tantárgybizottságok által jóváhagyott *Oktatási standardok és teljesítményi követelmények*, amelyek meghatározták, hogy a tanulónak, diáknak mit kellene elsajátítania és tudnia az egyes témakörökből az ismeretek és jártasságok szintjén is.

A matematika tantárgyak órakereteire, tanmenetére, standardjaira és követelményeire, valamint azok változásaira a következő alfejezetben mutatunk majd rá.

2008-ban került elfogadásra az új, 245/2008-es számú Iskolatörvény (Zákon č. 245/2008 Z. z. o výchove a vzdelávaní (školský zákon) a o zmene a doplnení niektorých zákonov, forrás: http://www.zakonypreludi.sk/zz/2008-245#cl2). A törvény számos módosításon átesett már (2019-ig 30-szor módosították).

Az törvény legjelentősebb változása az volt, hogy bevezeti és megkülönbözteti a közoktatásban az állami oktatási program (štátny vzdelávací program) és az iskolai oktatási program (školský vzdelávací program) fogalmát.

Az állami oktatási program a magyarországi Nemzeti Alaptantervhez hasonlóan meghatározza az iskolarendszer egyes szintjei számára, hogy az egyes oktatási területeken (vzdelávacia oblasť) mely kötelező tantárgyakból milyen heti óraterjedelemben kell azokat oktatni, valamint a választható tárgyakkal együtt összesen hány órában kell oktatást biztosítani (kerettanterv). Az oktatási területeken kívül keresztmetszeti témákat is meghatároz (pl. környezetvédelmi, multikulturális, egészségvédelmi nevelés). Tartalmazza az egyes tantárgyak jellemzését, céljait és oktatási standardjait is, azok témaköreit, s azon belül az egyes résztémakörökön belül a teljesítményi és a tartalmi standardokat is. A teljesítményi standard meghatározza, hogy mit kéne tudnia, mire kéne képesnek lennie a tanulónak/diáknak, a tartalmi standard pedig azokat a fogalmakat tartalmazza, amelyek az adott résztémakörökhöz kapcsolódnak és a tananyagban foglalkozni kell velük. Tartalmazza továbbá a tanulmányok sikeres teljesítésének feltételeit, a kötelező személyi, tárgyi-technikai feltételeket, a speciális oktatási-nevelési igényű tanulók oktatásának sajátosságait és feltételeit, valamint az iskolai oktatási program kidolgozásának alapelveit is.

Az állami oktatási programnak külön változata foglalkozik a nemzeti kisebbségek nyelvén (így a magyarul) oktató iskolákkal.

A közoktatás intézményes kerete, az iskolarendszer nem változott meg (tehát maradtak az alapiskolák, 4 és 8-éves gimnáziumok, szakközépiskolák és középfokú szaktanintézetek), de az állami oktatási program a nemzetközi ISCED (The International Standard Classification of Education) besorolást alkalmazza az oktatási szintekre:

Kód	Szint	
ISCED 0	Preprimáris	óvoda
ISCED 1	Primáris	az alapiskola alsó tagozata
ISCED 2	Alsó sekundáris	az 2. alapiskola felső tagozata 8-éves gimnáziumok első 4 évfolyama
ISCED 3	Felső sekundáris	gimnázium, középiskola 8-éves gimnáziumok utolsó 4 évfolyama

Az iskolai oktatási program az oktatást végző iskola által kidolgozott iskolai alapdokumentum, amit az igazgató ad ki az iskolai pedagógiai tanácsban és az iskolatanácsban történt megtárgyalást követően. Az iskola ezt az állami oktatási program alapján és annak megfelelően dolgozza ki, miközben a választható tárgyakról az iskola profiljának megfelelően, saját hatáskörben rendelkezhet. Ezen szabad óraszámokat az iskola ahhoz a tantárgyhoz rendeli, amelyikhez kívánja.

Az iskolák a reform által kompetenciát kaptak arra, hogy a megszabott kereteken belül saját maguk alkossák meg tanterveiket, tanmeneteiket. A reformot azonban sokan kritizálták, beleértve a sajtót is, hogy a 2008 áprilisában kiadott állami oktatási program szerint kellet kezdeni már a 2008/09-es tanévet felfutó rendszerben, tankönyvek, módszertani segédanyagok nélkül.

Az állami oktatási program 2011-ben egy kisebb átdolgozáson esett át, majd 2015-ben egy alaposabbon, ami Innovált állami oktatási program néven került kiadásra. Az Innovált állami iskolai program magyar tannyelvű iskoláinak vonatkozásában ezen iskolák képviseleti szervei üdvözölték a változást, mivel az nagyobb szabadságot ad az iskolai oktatási programok összeállításához (A 2008-as reformtól a magyar nyelv és irodalom órakötelezettségének megfelelő óramennyiséggel nagyobb szabadsága volt a szlovák tannyelvű iskoláknak).

A matematika tantárgyak órakereteire, tanmenetére, standardjaira és követelményeire, az állami oktatási program vonatkozásaiban, valamint azok változásaira az ezt megelőző időszakkal összevetve a következő alfejezetben mutatunk majd rá.

1.2. A matematika-tanítás óraterjedelmének, töltetének és követelményeinek változása a szlovákiai iskolareformok következtében

A következőekben megvizsgáljuk, hogy a rendszerváltást követően hogyan alakult a szlovákiai iskolarendszeren belül a matematika-tanítás tantervei szerint a matematika oktatására szánható órakeret, illetve milyen tartalmi és követelményi változások történtek az elmúlt közel három évtizedben.

1.2.1. A matematika tantárgy előírt időkeretének alakulása

A matematika tantárgy terjedelmét a tantervek határozták meg. A kötelező óraterjedelmeket elsődlegesen az egyes változások időrendi sorrendjében tüntetjük fel, majd az iskolák szintjei szerinti bontásban, hivatkozva az ezt szabályozó dokumentumokra. A középiskolák közül a gimnáziumokra koncentrálunk csak, tekintettel arra, hogy a szakközépiskolák és középfokú szaktanintézetek minden szakirány esetére külön tanterveket határoztak meg, s ha mindegyiket fel kívánnánk tüntetni, azt egyrészt meglehetősen hosszadalmas lenne és az áttekinthetőségét az alábbiaknak jelentősen rontaná. Másrészt sajnos nyilvános hiteles forrásokban a 2008-as iskolareform előtti tantervek és további pedagógiai dokumentációk sem érhetőek el. Az alábbi információkért köszönettel tartozunk az ŠPÚ alkalmazottai segítőkészségének, hogy lehetővé tették, hogy kutatómunkánkat az intézet könyvtárában végezhessük.

Az alapiskolák 1985-ös tantervét és tanmenetét a Szlovák Szocialista Köztársaság Oktatási Minisztériuma 1985 november 19-én a 10 749/1985-ös számú határozatában adták ki. A magyar tannyelvű iskolák számára 1985 január 7-ével a 12 561/1984-24-es számmal hagyta jóvá a minisztérium 1986 szeptember 1-ei érvényességgel. Ezek szerint a tanterv az alapiskola első évfolyamában heti 4, a felsőbb évfolyamokban (8.-ig bezárólag) heti 5 matematika tanórát határoztak meg. Az akkor érvényes szabályozás szerinti természettudományos osztályokban a felső tagozaton heti 6 óra matematikát határoztak meg, viszont a nyelvi osztályokban a 4. és 5. évfolyamban az általánoshoz képest egy-egy órával csökkentették a matematika órák számát.

A gimnáziumok számára a minisztérium 1984 február 6-án 3148/1984-21-es számmal hagyta jóvá a tanterveket. Ez az első évfolyamban heti 4, a másodikban heti 5, a harmadikban heti 4 és a negyedikben heti 5 óra terjedelemben határozta meg a matematika órák terjedelmét, amihez még választható tantárgyként matematika szeminárium bővíthette az utolsó évfolyamban. A matematika szakirányú osztályokban minden évfolyamban egy órával több matematikát határoztak meg, a matematika és fizika szakirányú osztályokban minden évfolyamban heti 5 óra matematika volt megadva.

A Szlovák Köztársaság Oktatási, Ifjúsági és Sport Minisztériuma 2819/1986-21-es számmal 1990 szeptember 1-ei érvényességgel hagyta jóvá a gimnáziumok általános tanterveit minden évfolyamra. 1990 április 1-én hagyták jóvá 1990 szeptember 1-ei érvényességgel a nemzetiségi nyelveken oktató gimnáziumok általános tanterveit. A matematika órák számának tekintetében e kettőben nincs különbség: mind a 4 évfolyamban heti 4 óra matematika volt meghatározva. A matematikai szakirány (1990 április 17-ei 2802/1990-20-as számú) esetében minden évfolyamban heti 6 óra matematika mellett még ábrázoló geometriát (3.-ban heti 1 óra, 4.-ben heti 2 óra) is tanultak. A matematika és fizikai szakirány (1990 április 17-ei 2802/1990-20-as számú, a magyar tannyelvű iskolákra 1806/1990-22 számú) esetében heti 5 óra matematika volt meghatározva minden évfolyamra. 1990 május 17-én a 3597/1990-20-as számmal, valamint 1990 május 31-én 3756/1990-22-es számmal a magyar tannyelvű gimnáziumok számára a minisztérium az első évfolyamtól kezdődően 1990 szeptember 1-ei érvényességgel változtat a matematika óraszámokon: az első két évben heti 4, az utolsóban heti 3 óra kötelező matematikából, viszont az iskola saját hatáskörében dönthet a kiegészítő órák számáról (matematikai, műszaki vagy természettudományos szakirány esetén emelni lehetett a matematika óraszámokat). 1990 június 21-én 2606/90-2-es számmal a minisztérium az első évfolyamtól kezdődően 1990 szeptember 1-ei érvényességgel a 8-éves gimnáziumok matematikai szakirányán heti 6 óra matematika volt meghatározva mindegyik évfolyamra.

A Szlovák Köztársaság Oktatási, Ifjúsági és Sport Minisztériuma 1991 május 6-án 2887/1991-20-as számmal 1991 szeptember 1-ei érvényességgel hagyta jóvá az alapiskolák tanterveit. A magyar tannyelvű iskolák számra a minisztérium 1991 május 24-én 437/1991-22-es számmal 1991 szeptember 1-ei érvényességgel hagyta jóvá az alapiskolák tanterveit, a matematikára vonatkozóan ugyanolyan terjedelemben. Az alsó tagozaton az első évfolyamban heti 4, a felsőbb évfolyamokban heti 5 kötelező matematika óra volt megszabva. A felső tagozaton a változás a 9. évfolyam bevezetésének volt köszönhető. Evégett 3 különböző variáns is készült. Az első szerint 9.-ig heti 5 óra, míg 9.-ben heti 4 óra matematikával számoltak; a második szerint az 5. és 6. évfolyamban heti 5 óra, a felsőbb évfolyamokban heti 4 óra matematikát határoztak meg, és végezetül a harmadik variáns szerint az 5. és 6. évfolyamban heti 5 óra, a 7. és 8. évfolyamban heti 5 óra, és a 9.-ben heti 3 óra matematikát adtak meg. A természettudományos osztályokban az 5. és a 8. évfolyam között az általánoshoz képest egy-egy órával volt magasabb a matematika órák száma.

A Szlovák Köztársaság Oktatási és Tudományos Minisztériuma 1993 június 22-én 3791/1993-30-as számmal valamint a nemzeti kisebbség tannyelvén oktató iskolákra 1993 augusztus 19-én 4523/1993-33 számmal 1993 szeptember 1-ei érvényességgel hagyta jóvá az alapiskolák tanterveit. Az alsó tagozaton 3 variánssal terveztek (általános, természettudományos és nyelvi); a nemzetiségi iskolákban 2 variánssal (általános és természettudományos), viszont ettől függetlenül matematikából mindegyik variáns szerint az első évfolyamban heti 4, a felsőbb évfolyamokban heti 5 óra matematikát terveztek. A felső tagozat 4 variáns létezett az első négy évfolyamra, amiből kettőben minden évfolyamban 5 óra matematikát terveztek, egyben 5-5-5-4, illetve egyben 5-5-4-4 matematika órával számoltak az egyes évfolyamokban. A magyar tannyelvű iskolákban két variáns volt, mindkettő szerint 5., 6. és 7. osztályban heti 5 óra, 8. osztályban pedig heti 4 óra matematikát írtak elő. A 9. évfolyamra 3 variáns létezett: ezek közül kettő heti 4 óra matematikát, egy pedig heti 3 óra matematikát szabott meg. Arról, hogy melyik tanterv-variáns alapján zajlik az oktatás, az iskola feltételei és a tanulók érdeklődése alapján az iskola igazgatója döntött. A matematika és természettudományos osztályok számára előírt tanterve az első négy évben heti 6 óra matematikát írt elő, míg a magyar tannyelvű iskolák matematikai és fizikai osztályaiban ez annyiban különbözött, hogy a 7. évfolyamra csak 5 óra volt megszabva.

A Szlovák Köztársaság Oktatási Minisztériuma 1997 március 17-én 474/1997-15-ös számmal 1997 szeptember 1-ei érvényességgel hagyta jóvá az alapiskolák felső tagozatának tanterveit. Három különböző variáns volt, ezek szerint a matematika órák előírt száma az egyes évfolyamokban: 5-5-5-4-4, illetve a másik két variáns esetében 5-5-5-4-5 volt. A matematika és természettudományos osztályok előírt tanterve az első három évben heti 6 óra, az utolsó kettőben heti 5 óra matematikát írt elő.

A Szlovák Köztársaság Oktatási Minisztériuma 2001 május 2-án 679/2001-41-es számmal 2001 szeptember 1-ei érvényességgel hagyta jóvá az alapiskolák új tanterveit. Az alsó tagozaton négy variáns létezett (a magyar tannyelvű iskolákra 2), viszont ettől függetlenül matematikából mindegyik variáns szerint az első évfolyamban heti 4, a felsőbb évfolyamokban heti 5 óra matematikát terveztek. A felső tagozatra három különböző variáns volt, ezek szerint a matematika órák előírt száma az egyes évfolyamokban: 5-5-5-4-4, illetve a másik két variáns esetében 5-5-5-4-5 volt. A matematika és természettudományos osztályok előírt tanterve az első három évben heti 6 óra, az utolsó kettőben heti 5 óra matematikát írt elő.

A Szlovák Köztársaság Oktatási Minisztériuma 2003 május 14-én 520/2003-41-es számmal 2003 szeptember 1-ei érvényességgel hagyta jóvá az alapiskolák új tanterveit. Az alsó tagozaton három variáns és egy idegen nyelvi változat létezett (a magyar tannyelvű iskolákra 2), viszont ettől függetlenül matematikából mindegyik variáns szerint az első évfolyamban heti 4, a felsőbb évfolyamokban heti 5 óra matematikát terveztek. A felső tagozatra három különböző variáns volt, ezek szerint a matematika órák előírt száma az egyes évfolyamokban: 5-5-5-4-4, illetve a másik két variáns esetében 5-5-5-4-5 volt. A matematika és természettudományos osztályok előírt tanterve az első három évben heti 6 óra, az utolsó kettőben heti 5 óra matematikát írt elő.

A 2008-ban bevezetett állami oktatási program az alapiskola alsó tagozatára annak mellékleteként kiadott kerettanterv (rámcové učebné plány) határozza meg az egyes tantárgyak kötelező minimális óraszámát. A 2008-ban eredetileg kiadott kerettantervet 2011-ben módosították még. A 2011 szeptember 1-étől érvényes kerettantervet a Szlovák Köztársaság Oktatási, Tudományos, Kutatási és Sport Minisztériuma 2011 május 20-án a szlovák tannyelvű iskolák számára 2011-7881/18674:1-921 számmal, a nemzeti kisebbségek tannyelvén oktató iskolák számára 2011-7924/18855:1-915 számmal fogadta el. A szlovák valamint a nemzeti kisebbségek tannyelvén oktató iskolák számára is heti 14 óra matematika, valamint heti 3 óra informatikai nevelés van meghatározva a Matematika és az információkkal való munka oktatási területen az egész tagozatra vonatkozóan. A meghatározott heti óraszámok egyes évfolyamok közötti elosztása az iskola hatáskörében van.

A szlovák tannyelvű iskolákban az összesen heti 76 kötelező órán felül további heti 20 órával az iskola rendelkezik a saját iskolai oktatási programjában, tehát az dönt arról, hogy e 20 órás keretből mely tantárgyakat milyen további kötelező óraszámmal támogatja (tehát az egyes tantárgyakból az országosan előírt kötelező minimális óraszámot az iskola megemelhette, és ezen óraszám-emelések összege heti 20óra volt). A nemzeti kisebbségek tannyelvén oktató iskolákban a heti 92 kötelező órán felül további heti 10 órával az iskola rendelkezik a saját iskolai oktatási programjában.

Az alapiskola felső tagozatára 2008-ban eredetileg kiadott kerettantervet 2011-ben szintén módosították. A 2011 szeptember 1-étől érvényes kerettantervet a Szlovák Köztársaság Oktatási, Tudományos, Kutatási és Sport Minisztériuma 2011 május 20-án a szlovák tannyelvű alapiskolák számára 2011-7881/18675:2-921 számmal a 8-éves gimnáziumok számára 2011-7915/18754:2-922 számmal, a nemzeti kisebbségek tannyelvén oktató alapiskolák számára 2011-7925/18857:1-915 számmal és a 8-éves gimnáziumok számára 2011-7926/18858:1-915 számmal fogadta el. A szlovák valamint a nemzeti kisebbségek tannyelvén oktató alapiskolák számára is heti 19 óra matematika, valamint heti 2 óra informatika illetve a 8-éves gimnáziumok első 4 évfolyama számára heti 15 óra matematika és heti 2 óra informatika van meghatározva a Matematika és az információkkal való munka oktatási területen. A meghatározott heti óraszámok egyes évfolyamok közötti elosztása az iskola hatáskörében van.

A szlovák tannyelvű alapiskolákban az összesen heti 115 kötelező órán felül további heti 31 órával, a 8-éves gimnáziumok első 4 évfolyamán a heti 94 kötelező órán felül további heti 25 órával az iskola rendelkezik a saját iskolai oktatási programjában. A nemzeti kisebbségek tannyelvén oktató iskolákban a 138 kötelező órán felül további heti 20 órával, a 8-éves gimnáziumok első 4 évfolyamán a heti 112 kötelező órán felül további heti 16 órával az iskola rendelkezik a saját iskolai oktatási programjában.

A gimnáziumokra, mind a négyéves, mind a 8-éves gimnáziumok utolsó 4 évfolyamára vonatkozó, eredetileg 2008-ban kiadott kerettantervet 2011-ben módosították. A 2011 szeptember 1-étől érvényes kerettantervet a Szlovák Köztársaság Oktatási, Tudományos, Kutatási és Sport Minisztériuma 2011 május 20-án a szlovák tannyelvű iskolák számára 2011-7915/18752:1-922 számmal, a nemzeti kisebbségek tannyelvén oktató iskolák számára 2011-7927/18859:1-915 számmal fogadta el. A szlovák valamint a nemzeti kisebbségek tannyelvén oktató iskolák számára is heti 11 óra matematika, valamint heti 3 óra informatika van meghatározva a Matematika és az információkkal való munka oktatási területen. A meghatározott heti óraszámok egyes évfolyamok közötti elosztása az iskola hatáskörében van. A szlovák tannyelvű iskolákban az összesen heti 93 kötelező órán felül további heti 31 órával az iskola rendelkezik a saját iskolai oktatási programjában. A nemzeti kisebbségek tannyelvén oktató iskolákban a 97 kötelező órán felül további heti 32 órával az iskola rendelkezik a saját iskolai oktatási programjában.

A kötelező, és fent megemlített díszpónibilis óraszámok felett is tervezhet választható tantárgyakat az iskola, azonban ezeket pénzügyi fedezetét a minisztérium nem biztosítja.

A 2015-ban bevezetett innovált állami oktatási program az alapiskolákra kiadott kerettanterve (amit a Szlovák Köztársaság Oktatási, Tudományos, Kutatási és Sport Minisztériuma 2015 február 6-án a szlovák tannyelvű iskolák számára 2015-5130/1760:1-10A0 számmal, a nemzeti kisebbségek tannyelvén oktató iskolák számára 2015-5620/3295:1-100A számmal fogadott el) a szlovák valamint a nemzeti kisebbségek tannyelvén oktató iskolák számára is az alsó tagozaton heti 16 óra matematika, valamint heti 2 óra informatikai nevelés, a felső tagozaton heti 21 óra matematika és heti 4 óra informatika van meghatározva a Matematika és az információkkal való munka oktatási területen. A meghatározott kötelező heti óraszámok egyes évfolyamok közötti elosztása is a kerettanterv része: az alapiskola első 8 évfolyamában heti 4 óra a 9. évfolyamban pedig heti 5 óra matematikával számolnak. A szlovák tannyelvű iskolákban az összesen heti 88 alsó tagozatos, valamint 127 felső tagozatos kötelező órán felül további heti 8 valamint 19 órával az iskola rendelkezik a saját iskolai oktatási programjában. A nemzeti kisebbségek tannyelvén oktató iskolákban a 96 alsó tagozatos, valamint 151 felső tagozatos kötelező órán felül további heti 6 valamint 7 órával az iskola rendelkezik a saját iskolai oktatási programjában.

A gimnáziumokra az innovált állami oktatási program kerettanterve (amit a Szlovák Köztársaság Oktatási, Tudományos, Kutatási és Sport Minisztériuma 2015 március 20-án a szlovák tannyelvű iskolák számára 2015-7846/10840:1-10B0 számmal, a nemzeti kisebbségek tannyelvén oktató iskolák számára 2015-7846/10840:1-10B0 számmal fogadott el) a szlovák valamint a nemzeti kisebbségek tannyelvén oktató iskolák számára is egyaránt heti 12 óra matematika, valamint heti 3 óra informatika van meghatározva a Matematika és az információkkal való munka oktatási területen. A meghatározott heti óraszámok egyes évfolyamok közötti elosztása az iskola hatáskörében van. A szlovák tannyelvű iskolákban az összesen heti 94 kötelező órán felül további heti 30 órával az iskola rendelkezik a saját iskolai oktatási programjában. A nemzeti kisebbségek tannyelvén oktató iskolákban a 103 kötelező órán felül további heti 26 órával az iskola rendelkezik a saját iskolai oktatási programjában.

A 8-éves gimnáziumokra az innovált állami oktatási program kerettanterve (amit a Szlovák Köztársaság Oktatási, Tudományos, Kutatási és Sport Minisztériuma 2015 március 20-án a szlovák tannyelvű iskolák számára 2015-7846/10840:1-10B0 számmal, a nemzeti kisebbségek tannyelvén oktató iskolák számára 2015-7846/10840:1-10B0 számmal fogadott el) a szlovák valamint a nemzeti kisebbségek tannyelvén oktató iskolák számára is egyaránt heti 29 óra matematika, valamint heti 6 óra informatika van meghatározva a Matematika és az információkkal való munka oktatási területen. A meghatározott heti óraszámok egyes évfolyamok közötti elosztása az iskola hatáskörében van. A szlovák tannyelvű iskolákban az összesen heti 202 kötelező órán felül további heti 41 órával az iskola rendelkezik a saját iskolai oktatási programjában. A nemzeti kisebbségek tannyelvén oktató iskolákban a 218 kötelező órán felül további heti 39 órával az iskola rendelkezik a saját iskolai oktatási programjában.

A kötelező, és fent megemlített díszpónibilis óraszámok felett is tervezhet választható tantárgyakat az iskola, azonban ezeket pénzügyi fedezetét a minisztérium nem biztosítja.

Összehasonlítások

Az alapiskolák alsó tagozatán habár több tantervi változás is történt 2008-ig, de a matematika kötelező óraszámai nem változtak meg: az első évfolyamban heti 4, a felsőbb évfolyamokban heti 5 óra matematikát írtak elő. Ez a mennyiség a tanterv szerinti teljes óraszámnak minden esetben több mint a 19%-át tette ki. A 2008-as állami oktatási program meglehetősen nagy szabadságot adott az iskoláknak a saját oktatási programjaik összeállításában, hiszen a tagozaton heti 20 (a magyar tannyelvű iskolákban heti 10) óráról az iskola dönthetett. A matematikából meghatározott tagozatra vonatkozó kötelező heti 14 óra azonban jelentősen elmarad a korábban érvényes tagozatra vonatkozó heti 19 órától. Természetesen az iskola a rendelkezésére álló órakeretből a matematika tantárgy órakötelezettségét megemelhette, de ezt semmi nem írta elő. A magyar tannyelvű iskolákban az eredeti heti 19 órás szintre való emelés a díszpónibilis órakeret felét vette volna igénybe. Ha az iskola saját oktatási programjában nem támogatta a matematika tárgyat, úgy annak aránya 16% alá is csökkenhetett. A 2015-ös innováció a tagozatra vonatkozó kötelező heti 16 órára emeli a matematika óra-támogatását, viszont ezzel egyetemben a bővítésre használható rendelkezésére álló órakeret is csökkent, s a magyar tannyelvű iskolákban a heti 19 órás szintre való emelés szintén a díszpónibilis órakeret felét veszi igénybe. Az innováció rögzítette a kötelező matematika órák eloszlását is az egyes évfolyamokban.

Az alapiskolák felső tagozatán mindegyik évfolyamban heti 5 órában volt meghatározva a matematika órakerete, ez a tanterv szerinti teljes óraszámnak minden évfolyamban több mint 15%-át tette ki. Az első komoly változás a 9. évfolyam bevezetése volt 1991 után. E szerint a legalacsonyabb matematika óraszámmal rendelkező variáns is 5-5-4-4 illetve 3 heti órát határozott meg, így a teljes, tagozatra vonatkozó kötelező matematikai óraszám növekedett. Az ezt követő tantervi változások ezen (1993, 1997, 2001 és 2003) nem gyengítettek, sőt 2001-től az alacsonyabb matematikai óraszámú változat is 5-5-5-4-4 heti matematikaórát szabott meg. A 2008-as állami oktatási programja meglehetősen nagy szabadságot adott az iskoláknak a saját oktatási programjaik összeállításában, hiszen a tagozaton heti 25 (a magyar tannyelvű iskolákban heti 20) óráról az iskola dönthetett. A matematikából meghatározott tagozatra vonatkozó kötelező heti 19 óra azonban elmarad a korábban érvényes tagozatra vonatkozó heti 23 órától. Természetesen az iskola a rendelkezésére álló órakeretből a matematika tantárgy órakötelezettségét megemelhette, de ezt semmi nem írta elő. Ha az iskola saját oktatási programjában nem támogatta a matematika tárgyat, úgy annak aránya 12%-ra csökkenhetett. A 2015-ös innováció a tagozatra vonatkozó kötelező heti 21 órára emeli a matematika óra-támogatását, viszont ezzel egyetemben a bővítésre használható rendelkezésére álló órakeret is jelentősen csökkent. Az innováció rögzítette a kötelező matematika órák eloszlását is az egyes évfolyamokban: 8.-ig bezárólag heti 4, a 9. évfolyamban pedig heti 5 órában szabják meg a matematika kötelező óraszámait.

A gimnáziumok esetében 1984-ben évfolyamonként 4, 5, 4 és 5 matematika óra volt megszabva, ami szemináriumokkal bővülhetett. 1986-ban mindegyik évfolyamban heti 4 óra matematikát határoztak meg. 1990-ben ezt tovább csökkentették: az első két évfolyamban heti 4, az utolsó kettőben heti 3 a kötelező matematika óraszáma. A 2008-as állami oktatási program ezt is csökkentette az egész tanulmányokra vonatkozóan heti 11 órára. A 2015-ös innováció kis emelést hajtott végre a kötelező matematika óraszámot az egész tanulmányokra vonatkozóan heti 12 órára emelve.

Ha kiindulási időpontként az 1986 előtti tantervi keretet tekintjük, akkor a teljes közoktatásban, a gimnázium végéig a diáknak legalább az egy tanév tanítási hetei számának 57-szeresének megfelelő számú matematikaórán kellett részt vennie, míg az ehhez képest mélypontot jelentő 2008 és 2015 közötti időszakban ugyanehhez az egy tanév tanítási hetei számának csak 44-szeresének megfelelő számú matematikaórán kellett részt vennie. Ez a kiindulási időszak keretéhez képest 22,81%-os csökkenés a matematika kötelező óraszámaira nézve. Ezt lehet, hogy jobban kifejezi az a tény, hogy a 2008-as keretben a gimnáziumi érettségiig eljutó diák kötelező matematikai óraszáma annyi, mint amennyit 1986 előtti rendszerben már a gimnázium első évének végéig teljesített.

1.2.2. Az előírt tananyag tartalmi követelményeinek változása

Az áttekinthetőség kedvéért az egyes szintek szerint fogunk haladni, s azon belül végezzük el az összehasonlítást. Tekintettel a tanmenetek terjedelmére igyekszünk azt a lehető legtömörebben leírni, az egyes változások után pedig igyekszünk a korábbiakhoz mért változásokat feltüntetni. A tanmenetek tartalmazzák, hogy mit kéne a tanulóknak az adott évfolyamban megtanulniuk, mi a tananyag nevelési-oktatási célja, milyen témakörökkel foglalkoznak és azon belül mi az amit el kéne sajátítaniuk. Az alábbiakban a tananyag előírt témaköreit és az azokra szánt órakeretet tüntetjük fel, az esetek többségében ugyanis azok eléggé beszédesen mutatják meg a tananyagot.

Az alapiskola alsó tagozatának tananyaga

Az alapiskolák alsó tagozatán 1984 szeptemberétől érvényes tanmenetét a Szlovák Szocialista Köztársaság Oktatási Minisztériuma 1982 szeptember 10-én a 12 150/1982-20-ös számú határozatában adták ki.

Az első évfolyam (heti 4 óra, éves szinten 140 tanóra) tanmenete tulajdonképpen a természetes számok 20-as számköre és azon belül az összeadás és kivonás művelete. A tanmenet 6 témakört tartalmazott:

1. Szemléletes bevezetése a természetes számoknak (14 óra)
2. Természetes számok 1-től 5-ig – numerizáció (14 óra)
3. A természetes számok összeadása és kivonása az 5-ös számkörben (20 óra)
4. a 0, 6, 7, 8, 9 és 10-es számjegyek (numerizáció, összeadás és kivonás a 10-es számkörben) (42 óra)
5. A számfogalom a természetes számok 20-as számkörében (8 óra)
6. Összeadás és kivonás a természetes számok 20-as számkörében (44 óra)

A második évfolyam (heti 5 óra, éves szinten 175 tanóra, ebből 145 óra aritmetika és 30 óra geometria) tanmenete a természetes számok 100-as számköre és azon belül az összeadás, kivonás, szorzás és osztás művelete, valamint a geometria alapfogalmait tartalmazta. A tanmenet az alábbi témaköröket tartalmazta:
Aritmetika

1. Az első évfolyam tananyagának ismétlése (22 óra)
2. Természetes számok 20-as számkörében a szorzás és osztás művelete (22 óra)
3. A számfogalom a természetes számok 100-as számkörében (12 óra)
4. A természetes számok 100-as számkörében az összeadás és a kivonás művelete (44 óra)
5. A szorzás és osztás művelete a természetes számok 100-as számkörében (44 óra)

Geometria

1. Térbeli testek és síkalakzatok (3 óra)
2. Pont, szakasz (5 óra)
3. Egyenes (7 óra)

4. Szakaszok összehasonlítása (7 óra)
5. A szakasz hossza (8 óra)

A harmadik évfolyam (heti 5 óra, éves szinten 175 tanóra, ebből 132 óra aritmetika és 43 óra geometria) tanmenete a természetes számok 10 000-es számköre és azon belül az összeadás, kivonás művelete, valamint a geometria szerkesztések alapfogalmait tartalmazta. A tanmenet az alábbi témaköröket tartalmazta:
Aritmetika

1. A második évfolyam tananyagának ismétlése (35 óra)
2. A szorzás és osztás művelete a természetes számok 100-as számkörében (20 óra)
3. A természetes számok 100-as számkörében az összeadás és a kivonás művelete kétjegyű számokkal (35 óra)
4. A számfogalom a természetes számok 10 000-es számkörében (10 óra)
5. A természetes számok 10 000-es számkörében az összeadás és a kivonás művelete (32 óra)

Geometria

1. A második évfolyam tananyagának ismétlése (10 óra)
2. Síkalakzatok (6 óra)
3. Kör, körvonal (6 óra)
4. Egyszerű szerkesztések körző segítségével (12 óra)
5. Háromszög szerkesztése adott oldalhosszokból (9 óra)

A negyedik évfolyam (heti 5 óra, éves szinten 175 tanóra, ebből 125 óra aritmetika és 50 óra geometria) tanmenete a természetes számok 10 000-es számköre és azon belül az összeadás, kivonás művelete, valamint a geometria szerkesztések alapfogalmait tartalmazta. A tanmenet az alábbi témaköröket tartalmazta:
Aritmetika

1. Az aritmetika tananyagának ismétlése és elmélyítése (20 óra)
2. A szorzás és osztás művelete a természetes számok 10 000-es számkörében (35 óra)
3. A számfogalom a természetes számok számkörében (25 óra)
4. Műveletek a természetes számok számkörében (40 óra)
5. Törtek (5 óra)

Geometria

1. A harmadik évfolyam tananyagának ismétlése (7 óra)
2. Szög (8 óra)
3. Párhuzamos egyenesek (14 óra)
4. Derékszögű négyszögek kerülete és területe (10 óra)
5. Testek (5 óra)
6. Összefoglaló ismétlés (6 óra)

Az alapiskolák alsó tagozatán **1995** szeptemberétől érvényes tanmenetét a Szlovák Köztársaság Oktatási Minisztériuma 1995 május 18-án 157/95-211-es számmal adta ki.

A változtatáson át nem eső részeket (témakörök, óraszámok) dőlt betűkkel jelöljük.

Az első évfolyam (heti 4 óra, éves szinten 132 tanóra) tanmenete tk. a természetes számok 20-as számköre és azon belül az összeadás és kivonás művelete, valamint bevezetés a geometriába. A tanmenet 5 témakört tartalmazott:

1. *Természetes számok 1-től 5-ig – numerizáció* (16 óra)
2. *A természetes számok összeadása és kivonása az 5-ös számkörben* (17 óra)
3. *a 0, 6, 7, 8, 9 és 10-es számjegyek (numerizáció, összeadás és kivonás a 10-es számkörben) (42 óra)*
4. *A számfogalom a természetes számok 20-as számkörében, Összeadás és kivonás a természetes számok 20-as számkörében* (26 óra)
5. Geometria (9 óra)

A második évfolyam (heti 5 óra, éves szinten 165 tanóra) tanmenete az alábbi témaköröket tartalmazta:

1. *Az első évfolyam tananyagának ismétlése* (12 óra)
2. *Természetes számok 20-as számkörében a szorzás és osztás művelete* (18 óra)
3. *A számfogalom a természetes számok 100-as számkörében (12 óra)*
4. *A természetes számok 100-as számkörében az összeadás és a kivonás művelete* (54 óra)
5. *A szorzás és osztás művelet*ének bevezetése *a természetes számok 100-as számkörében* (25 óra)
6. Geometria[1] (20 óra)

A harmadik évfolyam (heti 5 óra, éves szinten 165 tanóra) tanmenete az alábbi témaköröket tartalmazta:

1. *A második évfolyam tananyagának ismétlése* (16 óra)
2. *A szorzás és osztás művelete a* szorzótábla *számkörében* (50 óra)
3. *A számfogalom a természetes számok 10 000-es számkörében (10 óra)*
4. *A természetes számok 10 000-es számkörében az összeadás és a kivonás művelete* (35 óra)
5. Geometria (25 óra)

A negyedik évfolyam (heti 5 óra, éves szinten 175 tanóra, ebből 125 óra aritmetika, 25 óra geometria) tanmenete az alábbi témaköröket tartalmazta:
Aritmetika

1. A harmadik évfolyam *tananyagának ismétlése és elmélyítése (20 óra)*
2. *A szorzás és osztás művelete a természetes számok 10 000-es számkörében* (40 óra)
3. *A számfogalom a természetes számok számkörében* millióig és a felett *(25 óra)*
4. *Műveletek a természetes számok számkörében (40 óra)*
5. Geometria (25 óra)

[1] Alapjában véve a tartalma megegyezik az előző év geometria területén szétírt témakörökkel.

A **2008**-as állami oktatási program a matematika tantárgyban 5 általános témakört vezet be, amelyek a felsőbb szinteken is megjelennek:

- Számok, változó és számokkal való műveletek,
- Sorozatok, kifejezések, függvények, táblázatok, grafikonok,
- Geometria és mérés,
- Kombinatorika, valószínűség, statisztika,
- Logika, indoklás, bizonyítások.

Az állami oktatási program másként strukturált, mint a korábbi tanmenetek, de azoknak a bennük található tartalmi standardok (obsah vzelávania) feleltethetőek meg. Mivel nem volt meghatározva a kerettantervekben, hogy melyik évfolyamban hány óra kötelező, így ebben sincs évfolyamokra szétírva, mégis négy részre van osztva:

- Természetes számok 1-től 10-ig
- Összeadás és kivonás
- Geometria
- Specifikus matematikai gondolkozást fejlesztő alkalmazási feladatok megoldása

- Összeadás és kivonás a 20-as számkörben a 10-es átlépésével
- A természetes számok fogalmának kialakítása a 100-as számkörben
- Geometria
- Összeadás és kivonás a természetes számok 100-as számkörben
- Specifikus matematikai gondolkozást fejlesztő alkalmazási feladatok megoldása

- Szorzás és osztás a 20-as számkörben
- A természetes számok fogalmának kialakítása a 10 000-es számkörben
- Összeadás és kivonás a természetes számok 10 000-es számkörben
- Geometria
- Specifikus matematikai gondolkozást fejlesztő alkalmazási feladatok megoldása

- Szorzás és osztás a szorzótábla számkörében
- Összeadás és kivonás a természetes számok 10 000-es számkörben
- Geometria
- Specifikus matematikai gondolkozást fejlesztő alkalmazási feladatok megoldása

Ami az előző tanmenetekhez képest újnak számít a tananyagban, az a logika, kombinatorika és valószínűség megjelenése az alsó tagozatos matematikában.

A **2015**-ös innováció habár meghatározta a kötelező minimális matematika óraszámokat, mégsem évfolyam szerinti bontásban írja szét. Az egyes témakörökhöz közvetlenül meghatározza azonban a teljesítményi és a tartalmi standardokat is az alábbi témakörökben, s a teljesítményi standardokban az adott évfolyam végére elvártként fogalmazza meg a kívánt ismereteket, képességeket. A standardok témakörei:

Az első évfolyamra:

- Természetes számok 1-től 20-ig és a 0
- Összeadás és kivonás a 20-as számkörben
- Geometria és mérés
- Specifikus matematikai gondolkozást fejlesztő alkalmazási feladatok megoldása

A második évfolyamra:

- Összeadás és kivonás a 20-as számkörben a 10-es átlépésével
- A természetes számok fogalmának kialakítása a 100-as számkörben
- Összeadás és kivonás a természetes számok 100-as számkörben
- Geometria és mérés
- Specifikus matematikai gondolkozást fejlesztő alkalmazási feladatok megoldása

A harmadik évfolyamra:

- Szorzás és osztás a szorzótábla számkörében
- A természetes számok fogalmának kialakítása a 10 000-es számkörben
- Geometria
- Specifikus matematikai gondolkozást fejlesztő alkalmazási feladatok megoldása

A negyedik évfolyamra:

- Összeadás és kivonás a természetes számok 10 000-es számkörben
- Szorzás és osztás a természetes számok számkörében
- Geometria és mérés
- Specifikus matematikai gondolkozást fejlesztő alkalmazási feladatok megoldása

Ami az előzőekhez képest változott, az leginkább a témakörök sorrendje, valamint még hangsúlyosabb szerepet kap a logika, kombinatorika, valószínűség és a statisztika az alsó tagozatos matematikában.

Az alapiskola felső tagozatának tananyaga

Az alapiskolák 1986-ös tanmenetét a Szlovák Szocialista Köztársaság Oktatási Minisztériuma 1986 május 18-án 248/1986-2-es számmal adta ki. A tanmenet az egyes évfolyamok számára kötötten volt meghatározva:

Az ötödik évfolyam (heti 5 óra, éves szinten 165 tanóra) tanmenete a következő témaköröket tartalmazta:

1. Az alsó tagozat tananyagának ismétlése és elmélyítése (30 óra)
2. Összefoglaló gyakorlás, negyedéves írásbeli dolgozat és annak javítása (3+2 óra)
3. Természetes számok osztása (12 óra)
4. A szerkesztések alapelvei (10 óra)
5. A szög és annak nagysága (10 óra)
6. Tizedes számok, tizedes számok összeadása és kivonása (19 óra)

7. Összefoglaló gyakorlás, negyedéves írásbeli dolgozat és annak javítása (3+2 óra)
8. Műveletek szögekkel, sokszögek (10 óra)
9. Műveletek tizedes számokkal (18 óra)
10. Összefoglaló gyakorlás, negyedéves írásbeli dolgozat és annak javítása (3+2 óra)
11. Síkalakzatok területe, testek felszíne (14 óra)
12. Egész számok (12 óra)
13. Összefoglaló gyakorlás, negyedéves írásbeli dolgozat és annak javítása (3+2 óra)
14. Záró ismétlés (10 óra)

A hatodik évfolyam (heti 5 óra, éves szinten 165 tanóra) tanmenete a következő témaköröket tartalmazta:

1. Az ötödik évfolyam tananyagának ismétlése és elmélyítése (12 óra)
2. A természetes számok oszthatósága (14 óra)
3. Testek térfogata (10 óra)
4. Összefoglaló gyakorlás, negyedéves írásbeli dolgozat és annak javítása (3+2 óra)
5. Racionális számok (16 óra)
6. Középpontos és tengelyes szimmetria (12 óra)
7. Műveletek racionális számokkal (16 óra)
8. Összefoglaló gyakorlás, negyedéves írásbeli dolgozat és annak javítása (3+2 óra)
9. Háromszögek (15 óra)
10. Topografikus terepmunkák (4 óra)
11. Százalékszámítás (14 óra)
12. Összefoglaló gyakorlás, negyedéves írásbeli dolgozat és annak javítása (3+2 óra)
13. Paralelogrammák, hasábok (17 óra)
14. Kótázott ábrázolás (5 óra)
15. Összefoglaló gyakorlás, negyedéves írásbeli dolgozat és annak javítása (3+2 óra)
16. Záró ismétlés (10 óra)

A hetedik évfolyam (heti 5 óra, éves szinten 165 tanóra) tanmenete a következő témaköröket tartalmazta:

1. A hatodik évfolyam tananyagának ismétlése és elmélyítése (14 óra)
2. Egybevágóság, egybevágósági leképezések (8 óra)
3. Négyzetre-emelés és négyzetgyök (5 óra)
4. Pitagorasz tétele (7 óra)
5. Összefoglaló gyakorlás, negyedéves írásbeli dolgozat és annak javítása (3+2 óra)
6. Függvények. Egyenes és fordított arányosság (18 óra)

7. Arány (8 óra)
8. Kifejezések és azok átalakítása (12 óra)
9. Összefoglaló gyakorlás, negyedéves írásbeli dolgozat és annak javítása (3+2 óra)
10. Kör, körvonal, henger (16 óra)
11. Lineáris egyenletek (17 óra)
12. Összefoglaló gyakorlás, negyedéves írásbeli dolgozat és annak javítása (3+2 óra)
13. Szerkesztési feladatok (14 óra)
14. Topografikus terepmunkák (4 óra)
15. Lineáris egyenlőtlenségek (10 óra)
16. Merőleges vetítés (6 óra)
17. Összefoglaló gyakorlás, negyedéves írásbeli dolgozat és annak javítása (3+2 óra)
18. Záró ismétlés (10 óra)

A nyolcadik évfolyam (heti 5 óra, éves szinten 165 tanóra) tanmenete a következő témaköröket tartalmazta:

1. A hetedik évfolyam tananyagának ismétlése és elmélyítése (8 óra)
2. Hatványok (10 óra)
3. Hasonlóság (10 óra)
4. Összefoglaló gyakorlás, negyedéves írásbeli dolgozat és annak javítása (3+2 óra)
5. Algebrai kifejezések és azok átalakítása (18 óra)
6. Lineáris egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása (18 óra)
7. Összefoglaló gyakorlás, negyedéves írásbeli dolgozat és annak javítása (3+2 óra)
8. Vetítés két képsíkra (10 óra)
9. Lineáris függvények (18 óra)
10. Összefoglaló gyakorlás, negyedéves írásbeli dolgozat és annak javítása (3+2 óra)
11. Szögfüggvények (16 óra)
12. Testek térfogata és felszíne, a hegyes szög szögfüggvényeinek használata (15 óra)
13. Feladatok megoldásának algoritmizációja (15 óra)
14. Összefoglaló gyakorlás, negyedéves írásbeli dolgozat és annak javítása (3+2 óra)
15. Záró ismétlés (10 óra)

1991-ben a Szlovák Köztársaság Oktatási, Ifjúsági és Sport Minisztériuma 1991 június 28-án 5197/1991-20-as számmal adta ki a 9. évfolyam számára annak tanmenetét, az alábbi témakörökkel:

1. Számtartományok (10 óra)
2. Arány, arányosság, százalék (12)

3. Hatványok és gyökvonás (6 óra)
4. Szerkesztési feladatok (16 óra)
5. Kifejezések (10)
6. Lineáris egyenletek és egyenletrendszerek (8 óra)
7. Lineáris egyenlőtlenségek (10 óra)
8. Függvények, és tulajdonságaik (18 óra)
9. Alakzatok kerülete és területe (14 óra)
10. Testek térfogata és felszíne (12 óra)
11. Záró ismétlés (9 óra)
12. A negyedéves írásbeli dolgozatok és azok javítása (8 óra)

1995-ben a Szlovák Köztársaság Oktatási Minisztériuma 1995 május 29-én 5197/1991-20-as számmal adta ki pedig az 5.– 8. évfolyam számára az innovált tanmeneteket, az alábbi témakörökkel:

Az ötödik évfolyam (heti 5 óra, éves szinten 165 tanóra) tanmenete a következő témaköröket tartalmazta:

1. Az alsó tagozat tananyagának ismétlése és elmélyítése (25 óra)
2. Természetes számok osztása (12 óra)
3. A szerkesztések alapelvei (10 óra)
4. A szög és annak nagysága (23 óra)
5. Tizedes számok, műveletek tizedes számokkal (40 óra)
6. Derékszögű négyszögek (téglalap, négyzet) területe (15)
7. A negyedéves írásbeli dolgozatok és azok javítása (8 óra)

Az egyes témakörök tananyagának támogatására és a kiegészítő tananyagokra maradó óraszám 32 óra. Az ajánlott kiegészítő tananyag:

- Osztás háromjegyű számmal, a többjegyű számmal való osztás algoritmusa
- Halmazok, halmazműveletek, A logika alapjai
- Számológép használata
- Egyenletek megoldása
- A szögek grafikus összehasonlítása
- Szögek egybevágósága
- Topografikus terepmunkák
- A kombinatorika alapjai

A hatodik évfolyam (heti 5 óra, éves szinten 165 tanóra) tanmenete a következő témaköröket tartalmazta:

1. Az ötödik évfolyam tananyagának ismétlése és elmélyítése (12 óra)

2. Egész számok, műveletek egész számokkal (25 óra)
3. A téglatest és a kocka térfogata és felszíne (13 óra)
4. A természetes számok oszthatósága (14 óra)
5. Középpontos és tengelyes tükrözés (11 óra)
6. Racionális számok, műveletek racionális számokkal (24 óra)
7. Háromszögek (14 óra)
8. Paralelogrammák, hasábok (17 óra)
9. A negyedéves írásbeli dolgozatok és azok javítása (8 óra)

Az egyes témakörök tananyagának támogatására és a kiegészítő tananyagokra maradó óraszám 27 óra. Az ajánlott kiegészítő tananyag:

- Szöveges feladatok megoldása két szám legkisebb közös többszörösének és legnagyobb közös osztójának segítségével
- Feladatok megoldása tengelyes és középpontos szimmetria felhasználásával
- A háromszög köré írt és beírt körének megszerkesztése
- Topografikus terepmunkák
- A kombinatorika alapjai
- A valószínűségszámítás és statisztika alapjai
- A gráfelmélet alapjai
- Logikai alapismeretek (pl. matematikai tétel)

A hetedik évfolyam (heti 4 óra, éves szinten 132 tanóra) tanmenete a következő témaköröket tartalmazta:

1. A hatodik évfolyam tananyagának ismétlése és elmélyítése (10 óra)
2. Százalékszámítás (15 óra)
3. Trapéz (5 óra)
4. Arány. Egyenes és fordított arányosság (18 óra)
5. Háromszögek egybevágósága (6 óra)
6. Négyzetre-emelés, négyzetgyök (5 óra)
7. Pitagorasz tétele (8 óra)
8. Kifejezések és azok átalakítása (12 óra)
9. Kör, körvonal, henger (15 óra)
10. Lineáris egyenletek (20 óra)
11. A negyedéves írásbeli dolgozatok és azok javítása (8 óra)

Az egyes témakörök tananyagának támogatására és a kiegészítő tananyagokra maradó óraszám 10 óra, a heti 5 órás variáns esetében 43 óra. Az ajánlott kiegészítő tananyag:

- Függvények

- Egybevágósági leképezések (középpontos és tengelyes szimmetria, eltolás)
- Lineáris egyenlőtlenségek
- Topografikus terepmunkák
- Igényesebb szerkesztési feladatok, Thalész tétele
- Számológép használata összetettebb feladatokban
- A statisztika és a valószínűségszámítás elemei
- Diagramok

A nyolcadik évfolyam (heti 4 óra, éves szinten 132 tanóra) tanmenete a következő témaköröket tartalmazta:

1. A hetedik évfolyam tananyagának ismétlése és elmélyítése (9 óra)
2. Hatványok (10 óra)
3. Háromszögek hasonlósága (12 óra)
4. Algebrai kifejezések és azok átalakítása (18 óra)
5. A hegyes szög szögfüggvényei (12 óra)
6. Lineáris egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása (18 óra)
7. Testek térfogata és felszíne, a hegyes szög szögfüggvényeinek használata (20 óra)
8. Szerkesztési feladatok megoldása (15 óra)
9. A negyedéves írásbeli dolgozatok és azok javítása (8 óra)

Az egyes témakörök tananyagának támogatására és a kiegészítő tananyagokra maradó óraszám 7 óra, a heti 5 órás variáns esetében 40 óra. Az ajánlott kiegészítő tananyag:

- Hasonlóság segítségével megoldható igényesebb feladatok. Hasonlósági leképezés
- Algebrai törtkifejezések átalakítása
- Egyenletek és több ismeretlenes egyenletrendszerek megoldása, a nevezőben található ismeretlenű egyenletek megoldása
- Topografikus terepmunkák
- Szögfüggvények
- Egyenlőtlenségek
- Kombinatorikai, valószínűségszámítási, statisztikai és gráfelméleti feladatok megoldása

1997-ben a Szlovák Köztársaság Oktatási Minisztériuma 1997 április 3-án 1640/1997-151-es számmal adta ki az alapiskola felső tagozata (5.-9. évf.) számára a tanmeneteket.

Az ötödik évfolyam (heti 5 óra, éves szinten 165 tanóra) tanmenete a következő témaköröket tartalmazta:

1. Az alsó tagozat tananyagának ismétlése és elmélyítése (25 óra)
2. Természetes számok osztása (12 óra)
3. A szerkesztések alapelvei (10 óra)

4. A szög és annak nagysága (23 óra)
5. Tizedes számok, műveletek tizedes számokkal (40 óra)
6. Derékszögű négyszögek (téglalap, négyzet) területe (15)
7. A negyedéves írásbeli dolgozatok és azok javítása (8 óra)

Az egyes témakörök tananyagának támogatására és a kiegészítő tananyagokra maradó óraszám 32 óra. Az ajánlott kiegészítő tananyag:

- Osztás háromjegyű számmal
- Halmazok, halmazműveletek, A logika alapjai
- Számológép használata
- A szögek grafikus összehasonlítása
- Szögek egybevágósága
- Topografikus terepmunkák

A hatodik évfolyam (heti 5 óra, éves szinten 165 tanóra) tanmenete a következő témaköröket tartalmazta:

1. Az ötödik évfolyam tananyagának ismétlése és elmélyítése (15 óra)
2. Egész számok, műveletek egész számokkal (25 óra)
3. A téglatest és a kocka térfogata és felszíne (15 óra)
4. A természetes számok oszthatósága (18 óra)
5. Háromszögek (14 óra)
6. Törtek (15 óra)
7. Párhuzamosság. Paralelogrammák, trapézok (18)
8. Kombinatorikai feladatok (10 óra)
9. A negyedéves írásbeli dolgozatok és azok javítása (8 óra)

Az egyes témakörök tananyagának támogatására és a kiegészítő tananyagokra maradó óraszám 27 óra. Az ajánlott kiegészítő tananyag:

- Osztás háromjegyű számmal, a többjegyű számmal való osztás algoritmusa
- Halmazok, halmazműveletek, A logika alapjai
- Számológép használata
- A szögek grafikus összehasonlítása
- Szögek egybevágósága
- Topografikus terepmunkák

A hetedik évfolyam (heti 5 óra, éves szinten 165 tanóra) tanmenete a következő témaköröket tartalmazta:

1. A hatodik évfolyam tananyagának ismétlése és elmélyítése (15 óra)
2. Racionális számok, műveletek racionális számokkal (15 óra)

3. Hasáb térfogata és felszíne (10 óra)
4. Algebrai kifejezések és azok átalakítása (15 óra)
5. Arány. Egyenes és fordított arányosság (13 óra)
6. Háromszögek egybevágósága (6 óra)
7. Lineáris egyenletek (18 óra)
8. A háromszögek nevezetes elemei (8 óra)
9. Százalékszámítás (17 óra)
10. Középpontos és tengelyes szimmetria (10 óra)
11. Kombinatorika (6 óra)
12. A negyedéves írásbeli dolgozatok és azok javítása (8 óra)

Az egyes témakörök tananyagának támogatására és a kiegészítő tananyagokra maradó óraszám 27 óra. Az ajánlott kiegészítő tananyag:

- Poliéderek
- Egybevágósági leképezések (középpontos és tengelyes szimmetria, eltolás)
- Topografikus terepmunkák
- Diagramok

A nyolcadik évfolyam (heti 4 óra, éves szinten 132 tanóra) tanmenete a következő témaköröket tartalmazta:

1. A hetedik évfolyam tananyagának ismétlése és elmélyítése (15 óra)
2. Pitagorasz tétele (10 óra)
3. Algebrai kifejezések és azok átalakítása (20 óra)
4. Kör, körvonal (10 óra)
5. Lineáris egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása (20 óra)
6. Szerkesztési feladatok megoldása (15 óra)
7. Függvények (5 óra)
8. Kombinatorika és valószínűségszámítás (7 óra)
9. A negyedéves írásbeli dolgozatok és azok javítása (8 óra)

Az egyes témakörök tananyagának támogatására és a kiegészítő tananyagokra maradó óraszám 7 óra, a heti 5 órás variáns esetében 40 óra. Az ajánlott kiegészítő tananyag:

- Topografikus terepmunkák
- Elemi ismeretek logikából
- Feladatok megoldása elemi gráfelméleti ismeretek felhasználásával

A kilencedik évfolyam (heti 5 óra, éves szinten 165 tanóra) tanmenete a következő témaköröket tartalmazta:

1. A nyolcadik évfolyam tananyagának ismétlése és elmélyítése (15 óra)

2. Algebrai kifejezések és azok átalakítása (22 óra)
3. Háromszögek hasonlósága (12 óra)
4. Lineáris egyenletek és egyenletrendszerek megoldása (20 óra)
5. A hegyes szög szögfüggvényei (12 óra)
6. Függvények, lineáris függvény (14 óra)
7. Testek térfogata és felszíne (22 óra)
8. Kombinatorika, valószínűségszámítás és statisztika (7 óra)
9. A negyedéves írásbeli dolgozatok és azok javítása (8 óra)

Az egyes témakörök tananyagának támogatására és a kiegészítő tananyagokra nem marad óraszám, a heti 5 órás variáns esetében viszont 33 óra marad. Az ajánlott kiegészítő tananyag:

- Egybevágósági leképezések
- Szögfüggvények
- Topografikus terepmunkák
- Feladatok megoldása elemi gráfelméleti ismeretek felhasználásával
- A gömb térfogata és felszíne

A **2008**-as állami oktatási program másként strukturált, mint a korábbi tanmenetek, de azoknak a bennük található tartalmi standardok (obsah vzelávania) feleltethetőek meg. Mivel nem volt meghatározva a kerettantervekben, hogy melyik évfolyamban hány óra kötelező, így ebben sincs évfolyamokra szétírva, mégis öt részre van osztva:

1. Szorzás és osztás a természetes számok 10 000-es számkörében
2. A természetes számok fogalmának kialakítása millióig és a fölött
3. Műveletek természetes számokkal
4. Geometria és mérés
5. <u>Specifikus matematikai gondolkozást fejlesztő alkalmazási feladatok megoldása</u>

1. Műveletek természetes számokkal
2. Tizedes számok. Műveletek tizedes számokkal
3. Téglalap és négyzet területe
4. Szög, a szög nagysága, műveletek szögekkel
5. <u>Kombinatorikai feladatok</u>

1. Törtek, Műveletek törtekkel. Racionális számok
2. Százalékszámítás
3. A téglatest és a kocka térfogata felszíne
4. Arány. Egyenes és fordított arányosság
5. <u>Kombinatorikai feladatok</u>

1. Egész számok. Műveletek egész számokkal
2. Változó, kifejezés, egyenlet
3. Háromszög, háromszögek egybevágósága
4. Paralelogrammák, trapézok, a háromszög területe
5. Kör, körvonal
6. Hasábok
7. Valószínűségszámítás, statisztika

1. Hatványok és gyökvonás, nagy számok kifejezése hatvány alakban
2. Lineáris egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása
3. További testek térfogata és felszíne
4. Szimmetriai a síkon
5. Pitagorasz tétele
6. Függvények grafikus ábrázolása
7. Háromszögek hasonlósága
8. Statisztika

Az előző tanmenetekhez képest jelentőse megváltozott a tananyag tagolása.

A **2015**-ös innováció meghatározta a kötelező minimális matematika óraszámokat az egyes évfolyamokban, s a tanmenet is évfolyam szerinti bontásban írja szét. Az egyes témakörökhöz közvetlenül meghatározza azonban a teljesítményi és a tartalmi standardokat is az alábbi témakörökben (A változtatáson át nem eső témaköröket dőlt betűkkel jelöltük – ha az adott blokkon belül sorrend változott, azt változatlannak tekintettük):

Az 5. évfolyam tanmenete:

1. *A természetes számok fogalmának kialakítása millióig és a fölött*
2. *Műveletek természetes számokkal*
3. *Geometria és mérés*
4. Középpontos és tengelyes szimmetria a síkon
5. *Specifikus matematikai gondolkozást fejlesztő alkalmazási feladatok megoldása*

A 6. évfolyam tanmenete:

1. *Műveletek természetes számokkal*, oszthatóság
2. *Tizedes számok. Műveletek tizedes számokkal*
3. *Téglalap, négyzet* és a derékszögű háromszög *területe* tizedes számokban, a terület mértékegységei
4. *Szög, a szög nagysága, műveletek szögekkel*
5. Háromszög, háromszögek egybevágósága
6. *Kombinatorikai feladatok*

A 7. évfolyam tanmenete:

1. *Törtek, műveletek törtekkel.* Pozitív *racionális számok*
2. *Százalékszámítás*, Ezrelék
3. *A téglatest és a kocka térfogata felszíne* tizedes számokban, a térfogat mértékegységeinek átváltása
4. *Arány. Egyenes és fordított arányosság*
5. Kombinatorika

A 8. évfolyam tanmenete:

1. Pozitív és negatív számok, műveletek égész és tizedes számokkal, Racionális számok.
2. *Változó, kifejezés*
3. *Paralelogrammák, trapézok*, paralelogrammák, trapézok és a háromszög *területe* és kerülete
4. *Kör, körvonal*
5. *Hasábok*
6. *Valószínűségszámítás, statisztika*

A 9. évfolyam tanmenete:

1. *Hatványok és gyökvonás, nagy számok kifejezése hatvány alakban*
2. *Pitagorasz tétele*
3. Gúla, henger, kúp és gömb *térfogata és felszíne*
4. Egy változós *lineáris egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása*
5. *Háromszögek hasonlósága*
6. *Statisztika*
7. *Függvények grafikus ábrázolása*

A gimnáziumok tananyaga

A gimnáziumok 1984 szeptemberétől érvényes tanmenetét a Szlovák Szocialista Köztársaság Oktatási Minisztériuma az első két évfolyamra 1982 október 25-én 13 889/1982-21-es számmal, a 3. évfolyamra 1983 november 22-én 17 166/1982-21-es számmal és a 4 évfolyamra 1983 november 29-én 14 384/1983-21 számmal adták ki.

Az első évfolyam (heti 4 óra, éves szinten 136 tanóra, ebből 34 óra gyakorlat) tanmenete az alábbi témaköröket tartalmazta:

1. Bevezetés (15 óra)
2. A kombinatorika és a valószínűségszámítás alapjai (20 óra)
3. Elemi számelmélet, számtartományok (23 óra)
4. A geometria alapjai (22 óra)
5. Egyenletek és egyenlőtlenségek (48 óra)

A második évfolyam (heti 5 óra, éves szinten 170 tanóra, ebből 34 óra gyakorlat) tanmenete az alábbi témaköröket tartalmazta:

1. Matematikai indukció. Kombinatorika (20 óra)
2. Elemi függvények (88 óra)
3. A geometria alapjai (28 óra)
4. Számsorozatok és számsorok (25 óra)

A harmadik évfolyam (heti 4 óra, éves szinten 136 tanóra, ebből 34 óra gyakorlat) tanmenete az alábbi témaköröket tartalmazta:

1. Algoritmusok, programozás (30 óra)
2. Analitikus geometria (40 óra)
3. Metrikus geometria (30 óra)
4. Valószínűségszámítás és statisztika (28 óra)

A negyedik évfolyam (heti 5 óra, éves szinten 150 tanóra, ebből 30 óra gyakorlat) tanmenete az alábbi témaköröket tartalmazta:

1. Differenciál- és integrálszámítás (48 óra)
2. Komplex számok (24 óra)
3. Geometriai leképezések (15 óra)
4. Az ismeretek rendszerezése és konszolidációja (60 óra)

A gimnáziumok **1997** szeptemberétől érvényes tanmenetét a Szlovák Köztársaság Oktatási Minisztériuma 1997 február 24-én 1252/96-15-es számmal adták ki.

Az első évfolyam (heti 4 óra, éves szinten 132 tanóra) tanmenete az alábbi témaköröket tartalmazta:

1. Bevezetés a matematikai tanulmányokba (20 óra)
2. Függvények, egyenletek és egyenlőtlenségek I. (40 óra)
3. Síkmértan I. (20 óra)
4. Kombinatorika (24 óra)
5. Számelmélet (14 óra)
6. Kiegészítő tananyag (6 óra)
7. Írásbeli dolgozatok (8 óra)

A második évfolyam (heti 4 óra, éves szinten 132 tanóra) tanmenete az alábbi témaköröket tartalmazta:

1. Függvények, egyenletek és egyenlőtlenségek II. (54 óra)
2. Síkmértan II. (40 óra)
3. Térmértan I. (20 óra)
4. Kiegészítő tananyag (10 óra)
5. Írásbeli dolgozatok (8 óra)

A harmadik évfolyam (heti 4 óra, éves szinten 132 tanóra) tanmenete az alábbi témaköröket tartalmazta:

1. Térmértan II. (25 óra)
2. Analitikus geometria (58 óra)
3. Kiegészítő tananyag (6 óra)
4. Írásbeli dolgozatok (8 óra)

A negyedik évfolyam (éves szinten 90 tanóra) tanmenete az alábbi témaköröket tartalmazta:

1. Függvények, egyenletek és egyenlőtlenségek III. (46 óra)
2. Statisztika és valószínűségszámítás (20 óra)
3. Kiegészítő tananyag (6 óra)
4. Írásbeli dolgozatok (8 óra)

A **2008**-ban bevezetett állami oktatási program tartalmi standardjai az alábbi témaköröket tartalmazzák négy tömbben (aláhúzással jelölve a tömbök végét):

1. Számok, változó, számműveletek
2. Kifejezések, függvények, táblázatok, grafikonok
3. Geometria és mérés
4. Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika
5. Logika, érvelés, bizonyítások
6. Számok, változó, számműveletek
7. Kifejezések, függvények, táblázatok, grafikonok
8. Geometria és mérés
9. Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika
10. Logika, érvelés, bizonyítások
11. Geometria és mérés
12. Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika
13. Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

Az állami oktatási program **2016**-ban bevezetett innovációjának tartalmi standardjai az alábbi témaköröket tartalmazzák:

1. Számok, változó, számműveletek (A szám és annak felírása, számítási algoritmusok, változók és egyenletek)
2. Kifejezések, függvények, táblázatok, grafikonok
3. Geometria és mérés (Síkalakzatok és tulajdonságaik, mértani helyek és geometriai szerkesztések, térmértan, testek térfogata és felszíne, mérés)
4. Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika
5. Logika, érvelés, bizonyítások (ítéletalgebra, bizonyítások)

A tananyag-változások elemzése

A előző pár alfejezetben szintek szerinti lebontásban mutattuk meg az előírt témakörökön keresztül a tananyag tartalmát valamint annak változásait a lezajlott reformok és innovációk fényében. Általánosan kimondható, hogy a szlovákiai közoktatási rendszerben egyféle liberalizáció ment végbe: a 2008-ig bevezetett kisebb változások a tananyag struktúráján kisebb mértékű módosítások történtek csak: egyes tananyagok kiegészítő tananyaggá módosultak, azonban a 2008-as reform gyökeresen új szemléletet vezetett be, ami jóval nagyobb szabadságot adott az iskoláknak a saját tanterveik és tanmeneteik kidolgozásában. A 2015-ös innováció az alsóbb szinteken rögzíti ugyan az egyes évfolyamok számára a kötelező minimális óraszámokat (ami a 2008-asban az egész tagozatra volt csak megadva), de az előírt tananyag adott évfolyamok szerinti bontását egyik szinten sem állítják vissza a 2008 előtt használt formátumba.

Habár egyesek üdvözölték az iskolák állami oktatási program által kapott szabadságát, de joggal merülhet fel, hogy nem öntötték-e ki a reformmal a meleg vízzel együtt a gyereket is? Milyen tankönyveket használhatnak így az iskolák? Mi történik a diákkal esetleg egy iskolaváltás után?

Az **alsó tagozat**on az 1995-ben történt változtatás már az első évfolyamba is helyez geometriai alapokat, és kissé változtat az egyes témakörök órakeretén, de jelentős változások nem történtek. A 2008-as reform már az alsó tagozatba is beviszi a kombinatorika, valószínűségszámítás és statisztika tananyagát (A specifikus matematikai gondolkozást fejlesztő alkalmazási feladatok megoldása témakörben kéne ezekkel is foglalkozni), ami eléggé elgondolkodtató, hiszen a tanulók csak a természetes számok körében tanulnak műveleteket végezni, az arány, a törtek és a százalékszámítás is a felső tagozat tananyaga. A korábbi tanmenetek szerint a természetes számok (10 000-es) körében a négy alapművelet az alsó tagozatos szerves részét képezte, azonban a reformot követőben a szorzás és az osztás csak a szorzótábla számkörében szerepelt csupán. A 2015-ös innovációt követően a szorzás és osztás a természetes számok körében visszakerül a tananyagba, változik a témakörök sorrendje és a kombinatorika, valószínűségszámítás és statisztika szerepe tovább erősödik.

A kombinatorika témakörében ilyen motivációjú szöveges feladatokat (a manipuláció és a szemléltetés szintjén), statisztikai jelleggel pedig adatok gyűjtését és személtetését (táblázatban, grafikonnal) kellene megvalósítani a tartalmi standardok szerint. Az ilyen feladatokkal a reform előtt a tanulóknak jellemzően pár évvel később kellett találkozniuk (pl. a fizika tantárgyon és matematikában a függvények bevezetésekor az adatok táblázatban szerepeltetésével és grafikus ábrázolásával), nem tudjuk mi indokolta, hogy ezzel kiemelten foglalkozzanak még azelőtt, hogy megbízható számolási készségeket sajátítanának el.

A **felső tagozat**on 1986-tól egy eléggé pontosan szétosztott tanmenet volt meghatározva. Ezt nem változtatta meg a 9. évfolyam 1991-es bevezetése sem, a 9. évfolyamra előírt tanterv már korábban szereplő témaköröket ismétel tulajdonképpen. Az 1995-os változtatás a témakörök sorrendjébe komolyabban belenyúl, és a kötelezően előírt témakörök mellé mozgásteret ad azok megerősítésére valamint egyes témaköröket kiegészítő tananyagként határoz meg. Az 1997-es módosítás szintén változtat az egyes témakörök elhelyezésén, sorrendjén. A változások következtében az egyes témakörök sorrendje többször felcserélődött. Példaként említeném Pitagorasz tételét, ami a 7. évfolyam tananyagának elején szerepelt, közvetlen a négyzetre-emelés és gyökvonás témakör után, 1995-ben ez ugyanennek az évfolyamnak második félévének tananyaga lett közvetlen a négyzetre-emelés és gyökvonás témakört követően, 1997 után a 8. évfolyamba került és nincs direkt négyzetre-emelés és gyökvonás témakör, 2008 után a 9.-es tananyagban a második félévben szerepel csak, miközben az év első témaköre a hatványozás, majd 2015 után a 9. évfolyam tananyagának elejére került az általános hatványozást tartalmazó témakört követve.

Az alsó tagozatos változások hatásai (pl. hogy 2008-as reform következtében a természetes számok körében végzett szorzás és osztás ki lett hagyva) a felső tagozatos tanmenetre is hatással voltak (2008-at követően a természetes számok körében végzett szorzás és osztás az 5. évfolyamba került). A vizsgált időszakban itt voltak a legjellemzőbbek a korábban írt liberalizációs törekvések és a témakörök sorrendjeinek és óratámogatásának változásai. Egyes, korábban kötelező témakörök előbb a kiegészítő tananyagok közé kerültek, majd végleg kiszorultak a tanmenetből (pl. merőleges vetítés), mások (pl. a kombinatorika) viszont pontosan ellentétesen fokozatosan kerültek be: előbb még nem szerepeltek, aztán mint kiegészítő tananyag jelentek meg, majd beépültek kötelező témakörként.

A **gimnázium**ok előírt tanmeneteiben úgyszintén jelentősen megjelennek ezek a hatások: mind a liberalizáció, mind pedig a témakörök fluktuációja. Az 1984-ben kiadott tanmenet témakörei meghatározott óraszámaival a feltüntetettek alapján filigránnak tűnhetnek, azonban a tanmenet az egyes témakörökhöz részletesen felsorolja a tennivalókat és a tananyagot (lásd a geometriával foglalkozó következő fejezetet – ott az egyes érintett témakörök előírt tananyagát részletesen bemutatjuk). A 2008-as állami oktatási program matematikát érintő része lényegesen szűkszavúbb az előző tanmeneti részeknél. Ennek következtében az iskola, a tanár sokkal nagyobb szabadságot kap, viszont az oktatás számonkérhetősége ezért megkérdőjelezhetővé válhat. Az 1984-e tanterv tanmenete még külön témakörként számol a differenciál- és integrálszámítással, a komplex számokkal (csaknem egy félévnyi tananyag 4. évfolyamban), a 2008 utáni ezeket már meg sem említi előírt tananyagként. A kombinatorika, a valószínűségszámítás és a statisztika viszont minden évfolyam tananyagába bekerül 2008-ban, sőt a 4. évfolyam tananyaga másból sem áll. A 2015-ös innováció nem határozza meg, hogy melyik évfolyamban mit, milyen sorrendben és terjedelemben kéne tanítani, de az egyes fő és azokon belüli rész-témakörök teljesítményi és tartalmi standardjai meglehetősen pontosan definiálják már a tananyagot (lásd a következő fejezetben - a geometria tananyagán ezt bemutatjuk).

1.3. A geometria tananyaga változásának részletes elemzése

1.3.1. Gondolatok a geometria oktatásának módszertani kérdéseihez

A matematika, s azon belül a geometria oktatásának az emberi civilizáció megszerzett felhasználható ismereteinek (pl. terület- és térfogatszámítás, a Pitagorasz tétel, a szögfüggvények használata) a következő generációra történő átadásán kívül kiemelt szerepe van a logikus és az algoritmikus gondolkodás, valamint a térszemlélet fejlesztésében is. A jelen kor, az információs társadalom, a modern info-kommunikációs eszközök és hálózatok egyre könnyebben elérhetővé teszik az információkhoz, a „tárgyi” tudáshoz való hozzáférést, viszont az, hogy az információkat hogyan használjuk fel, ahhoz elengedhetetlenek azok az általános valamint speciális gondolkozási sémák, amelyek segítségével a megoldandó problémáinkat, feladatainkat sikeresen meg tudjuk oldani.

Az, hogy valamilyen ismerettel rendelkezünk, valamit megértettünk, még nem szükségszerűen jelenti, hogy azt alkalmazni is tudjuk. Példaként az integrálszámítás geometriai értelmezését hozom fel, miszerint a határozott integrál a függvénygörbe adott intervallumon vett görbe alatti területével egyezik meg, amit úgy tudunk közelítőleg meghatározni, hogy az adott intervallumot sok rövidebb intervallumra osztjuk (felosztás), majd ezeken az intervallumokon a görbe alatti részt úgy fedjük le rész-intervallum szélességű téglalapokkal, hogy azok területe biztosan kisebb (a téglalap magassága a görbe rész-intervallumon vett minimuma) illetve nagyobb (a téglalap magassága a görbe rész-intervallumon vett maximuma) legyen a görbe alatti területtől (ún. alsó illetve felső tégláný-összeg). Általában minél sűrűbben (finomabb felosztással) osztjuk fel a területünket, annál jobb lesz a téglány-összegekkel meghatározott alsó és felső közelítésünk. A felosztás finomításának növelésével ezen alsó és felső becslő-értékek egy integrálható függvény esetében a függvény görbéje alatti területhez fognak konvergálni (közelíteni). Ez az elv jó szemléltetéssel megérthető akár egy értelmes 10-éves gyermekkel is, viszont az még közel sem jelenti azt, hogy ő tudna integrált számítani. Az integrál-számítás gyakorlati felhasználásához a függvényekkel kapcsolatos ismeretek, a differenciál-számítás, a határozatlan függvény (primitív függvény) és a Newton-Leibniz szabály ismerete és egy csomó további számolási tudás, tapasztalat szükséges. Egy egyszerű határozott integrál (pl. polinom) kiszámításához nincs is szükség okvetlenül a leírt elvre, geometriai értelmezésre. Azonban ha olyan személy kiképzése a cél, akitől egy kissé komolyabb, nehezebb feladatok megoldását is elvárjuk, akkor mindezt, tehát az elvet, a gyakorlati ismereteket, készségeket és jártasságokat is tudnia kell, s azon felül is még egyfajta felsőbb rálátással is kell rendelkeznie, valamint ismernie és használnia kell tudnia a vonatkozó gondolkodási sémákat is.

Egy új fogalom, ismeret, kapcsolat megértése, elhelyezése és rendszerezése a fogalmi hálónkban segít a fogalom, ismeret, kapcsolat felhasználásában. Sokkal könnyebben használunk valamit, ha azt valóban értjük is. Általánosságában a helyes megértés és a fogalmi hálóban való beágyazás feltétele az ismeret alkalmazhatóságának. Példaként a háromszög köré írt körének megszerkesztését hozzuk fel. Ha a tanuló megértés nélkül igyekszik megtanulni (bemagolni a definíciót), hogy hogyan szerkesszük ezt meg, úgy ismerete felszínes lesz, amire lehetséges, hogy pár napig (vagy a témazáró dolgozatig) emlékszik, de nem tudja majd huzamosabb idő után felidézni és alkalmazni. Kulcsfontosságú ez esetben, hogy a kör, mint mértani hely fogalmával tisztában legyen. A köré írt kör, ami áthalad a háromszög mindhárom csúcsán, tehát középpontja azonos távolságra van mindhárom csúcstól. Két csúcstól (ponttól) azonos távolságra fekvő pontok mértani helye a csúcsok által meghatározott oldal (szakasz) felező-merőlegese. A háromszög oldalfelező merőlegesei ezért egy pontban kell hogy messék egymást (ha a metszéspont ugyanolyan távolságra van az 1. és a 2. csúcstól és ugyanolyan távolságra van a 2. és a 3. csúcstól is, akkor a ugyanolyan távolságra kell lennie az 1. és a 3. csúcstól is). A közös metszéspontjuknak olyan tulajdonsága van, hogy mindhárom csúcstól azonos távolságra fekszik, tehát ez lesz a köré írt kör középpontja. Ha a tanuló nem megértéssel igyekszik megtanulni a matematikát, hiányoznak a megértéshez szükséges alapjai, akkor a szemében ez „fekete mágiává” válik, és elveszti az érdeklődését.

Az, hogy valamit értünk, még nem szükségszerűen jelenti azt, hogy használni is tudjuk, valamint azt sem, hogy a definíción alapuló módszer a legeffektívebb lenne. Az hogy $3 \cdot 5$ azt jelenti, hogy $5+5+5$, a szorzás műveleti definíciójának egy példája, amit jó, ha a gyermek ismer a szorzás műveletéről, de a többjegyű számok szorzásánál alighanem már nem a leghatékonyabb mód a megoldásra – ezt megelőzően célszerű a gyermekkel a szorzótáblát megtanítani és a számára kellő mértékben úgy begyakoroltatni, hogy a szorzótábla használata rutinos készségévé váljon.

A szakma és a szakirodalmak is az ismeretek felhasználhatóságára helyezik a hangsúlyt, azonban véleményünk szerint ennek is vannak mélységei. Ha konkrét példán szeretnénk érzékeltetni, akkor válasszuk ki például témaként Pitagorasz tételét. Már az ismeret szintjén is találhatunk különböző mélységi szinteket: egyesek csak egy algebrai összefüggés ($a^2 + b^2 = c^2$) memorizálásaként fogják fel, de szerencsésebbnek tarjuk, ha szöveges formában kimondott általános érvényességű állításként – tételként gondolunk rá (A derékszögű háromszögben a befogókra emelt négyzetek területeinek összege megegyezik az átfogóra emelt négyzet területével.). Függetlenül attól, hogy algebrai összefüggésként vagy szöveges állításként emlékezünk rá, de nem ágyazódott be kellően előkészített fogalmi közegbe, nem sok esélyünk van a sikeres, általános felhasználásra. A beágyazhatósághoz a háromszög, a derékszög, a derékszögű háromszög és annak oldalainak megnevezésére, a négyzet, a terület és a négyzet területének fogalmára van szükség. A felmerülő feladatok használatához továbbá szükséges a négyzetre-emelés, az összeadás és esetleg a kivonás, a négyzetgyökvonás műveletének, az egyenlőség, az egyenlet, az egyenletmegoldás (összetettebb feladat esetén az algebrai kifejezések átalakítása) fogalmának ismerete és használatának jártasságai is, továbbá egyéb geometria ismeretek és jártasságok (pl. hogy az átfogó a leghosszabb oldal, vagy hogy a téglalap átlója az átfogónak feleltethető meg, ha az oldalakat befogónak tekintjük). Pitagorasz tételét tehát csak akkor értjük és tudjuk majd alkalmazni, ha a korábbi a fenti fogalmakkal tisztában vagyunk. Előfordulhat, hogy a tanuló nem derékszögű háromszögben is alkalmazni akarja (ahol ugyebár nem alkalmazható), vagy helytelenül alkalmazza mert nincs tisztában a befogók és átfogók fogalmával. Az alkalmazás legfelszínesebb szintje az iskolai alap típuspélda, miszerint számítsa ki a derékszögű háromszög átfogóját, ha adott a két befogó hossza. Ezt követő szint, amikor az egyik befogót kell kiszámítani az átfogó és a másik befogó ismeretében. Az ezt követő szint, amikor nincs megadva direkt módon a feladatban, hogy melyik adat számít befogónak, átfogónak (pl. ha azt mondjuk, hogy a derékszögű háromszög két rövidebb oldala adott és határozzuk meg a harmadikat), majd jöhetnek további szintként azok a feladatok is, ahol a feladatban meg kell találnunk a derékszögű háromszöget (pl. számítsuk ki az egyenlő-szárú háromszög magasságát, ha ismerjük az alap és a szárak hosszát). A magyar nyelvű szakirodalom a *fokozatosság elvének* nevezi azt a folyamatot, hogy a feladatok megoldásakor az egyszerűbb, típusfeladatok megoldásával, begyakorlásával kezdünk, s fokozatosan térünk rá az egyre nehezebb, bonyolultabb feladatokra. Mindezek közben ideális esetben a fogalmi háló folyamatosan bővül, új kapcsolódások jönnek létre a fogalmak között és ahogy Hejný is kiemeli (Hejný et al., 1988), nagyon fontos mozzanat a megszerzett ismeretek rögzítése, elmélyítése is, amit gyakorlással, feladatok megoldásával tudunk elérni.

A matematika oktatásának megvan az az erős specialitása, hogy az egyes ismeretek nem izoláltak, és ezért ha azok nem épülnek be a fogalmi hálóba és a kellő mennyiségű gyakorlással nem rögzülnek úgy, hogy a tanuló azt rutinosan használni tudja, akkor fennáll annak a veszélye, hogy az azokra épülő fogalmak, ismeretek használata ezen korábbi defektusok miatt nem lesz kivitelezhető. A matematika oktatása során természetesen a célunk a matematika tananyagának átadása ás begyakorlása a tanulókkal, azonban ez csakis akkor lesz hatékony, ha mindezek közben az ehhez szükséges megfelelő gondolkodási sémákat (Mérő, 2013) és stratégiákat (Pólya, 1977) is elsajátíttatjuk vele. Visszautalva a fejezet kezdő gondolataihoz a matematika oktatásnak a jelen korban a fő szerepe, feladata a tananyag átadása mellett az, hogy a közoktatás során ez az a tantárgy, ami a problémamegoldás gondolkodási sémáit és stratégiáit kiemelten tanítja. Az alapiskolai matematika tananyagán belül a geometria témakörei azok leginkább, ahol több különböző ismeret (melyekkel a tanuló időben is különböző időszakokban találkozott) közötti kapcsolatok megtalálása, összekapcsolása vezet egy feladat megoldásához. A Pólya által meghatározott feladatmegoldási stratégia négy fázisa nagyon jól megtalálható egy geometriai szerkesztési feladat megoldási fázisaiban. Egy szerkesztési feladattal tehát nem csupán egy több évezredre visszanyúló tudományos ismeretet és hagyományt örökítünk tovább, de intellektuális kihívás is, amellyel a tanulók probléma- és feladatmegoldási képességeit is fejlesztjük.

1.3.2. A geometria tananyag összevetése a szlovákiai közoktatás változásaiban

Az előző fejezetekben megvizsgáltuk milyen változásokon esett keresztül a szlovákiai közoktatás legiszlatív, terjedelmi (kötelező óraszám) és témaköri szinten. Az alábbiakban csak a geometria tananyagára koncentrálva abba mélyebben is belemélyedünk. Hogy ezt nem teljes körűen tesszük annak az oka egyrészt az, hogy az eddigi „felszínes" összehasonlításaink is eléggé terjedelmesek voltak, másrészt vizsgálódásaink során ezen a területen, a geometriában kívánunk a későbbiekben megoldási ötletekkel előállni.

Mivel a vizsgált időszakban 4-5 tantervvel és tanmenettel is meghatározottak voltak a közoktatás keretei, és az összes mélyebb tartalmi változás nyomon követése áttekinthetetlenné tenné az összevetéseinket, ezért a rendszerváltás környéki részletes tanmeneti tartalmi tananyagot fogjuk összevetni a 2008-as nagy reform elvárásaival, valamint annak 2015-ös innovációjával. A közbeeső időszakban legalább egy változás, innováció a tantervek, tanmenetek szintjén lezajlott, és eltelt cca. két évtized is.

Az alapiskola alsó tagozatának geometria tananyaga

Az **1982**-es tanmenet alapján a geometria a 2. évfolyamtól szerepel a tananyagban. A jobb áttekinthetőség kedvéért az egyes témaköröket, majd ezt követően pontokba szedetten közöljük az elvárt tananyagot részletesen. Az egyes évfolyamok tananyagait vízszintes vonallal válasszuk el.

Térbeli testek és síkalakzatok (3 óra)

- A háromszög, a kör, a négyzet és a téglalap alakja.
- A kocka, a téglatest, a gömb, a gúla és a henger alakja; ezek háromszög, négyzet, téglalap és kör alakú lapjai.

Pont, szakasz (5 óra)

- A pont mint két vonal metszéspontjának a kijelölése. A pont modellezése a térben. A pontok megnevezése nyomtatott nagy betűkkel.
- Szakasz. A szakasz végpontjai. A szakasz megnevezése a végpontjai segítségével. A szakasz modellezése. Szakasz rajzolása vonalzóval. Pontok kijelölése amelyek adott szakaszhoz tartoznak, és olyan pontok kijelölése, amelyek nem tartoznak az adott szakaszhoz.

Egyenes (7 óra)

- Félegyenes, a félegyenes kezdőpontja, pontok kijelölése amelyek adott félegyeneshez tartoznak, és olyan pontok kijelölése, amelyek nem tartoznak adott félegyeneshez.
- Egyenes. Egyenes megnevezése két pontja segítségével vagy az ábécé kis betűivel. Egyenes rajzolása vonalzóval adott ponton keresztül és két adott ponton keresztül. Pontok kijelölése, amelyek adott egyeneshez tartoznak, és olyan pontok kijelölése, amelyek nem tartoznak adott egyeneshez. Pontok illeszkedése (rajta fekszik - nem fekszik rajta) adott egyenesre (szakaszra).
- Párhuzamos egyenesek.

Szakaszok összehasonlítása (7 óra)

- A szakasz hosszának átmásolása adott félegyenesre. Egybevágó szakaszok. Az egybevágóság jele ($\cong$).
- Szakaszok hosszának összehasonlítása. A kisebb és nagyobb viszony szakaszok hosszára, a rendezési jelek használata: $AB < CD$, $CD > AB$.
- A szakasz felezőpontja.

A szakasz hossza (8 óra)

- A hosszmérték, beosztásos vonalzó, a szakasz hossza.
- Hosszmértékegységek: cm, dm, m.
- A szakasz hosszának mérése centiméterekben, deciméterekben és méterekben.

A második évfolyam tananyagának ismétlése és elmélyítése (10 óra)

- Pont, szakasz, félegyenes, ellentett félegyenesek, egyenes, metsző egyenesek.
- Pontok meghatározása négyzetes hálón
- Szakasz hossza. Hosszmértékegységek: cm, dm, m. Szakasz hosszának mérése adott mértékegységben.
- Szakasz kijelölése a terepen. Távolságok becslése. Mérés mérőrúddal, mérőszalaggal.

Síkalakzatok (6 óra)

- Sík, háromszög, négyszög, négyzet, téglalap. Csúcsok, oldalak.

Kör, körvonal (6 óra)

- Kör, körvonal, gömb. Középpont, sugár, átmérő. Pontok kijelölése, amelyek adott körhöz (körvonalhoz) tartoznak illetve nem tartoznak.
- A körző használatának gyakorlása. Adott középpontú tetszőleges kör, és adott középpontú és sugarú kör rajzolása.
- Körív. Az egyenes és a kör metszéspontja. Két kör metszéspontja.
- Egybevágó körök (körvonalak).

Egyszerű szerkesztések körző segítségével (12 óra)

- Szakasz átmásolása adott félegyenesre és adott hosszúságú szakasz felvétele körző segítségével

- Szakaszok grafikus összege és különbsége. Szakaszok hosszának összege és különbsége.
- Szakaszok grafikus többszörözése. Szakaszok hosszának többszöröse.

Háromszög szerkesztése adott oldalhosszokból (9 óra)

- Tapasztalatok a háromszög-egyenlőtlenséggel.
- Háromszög szerkesztése, amelyek oldalai adott szakaszokkal egybevágóak, illetve amelyeknek adott az oldalainak a hossza.
- A háromszög kerülete.

A harmadik évfolyam tananyagának ismétlése (7 óra)

- Sík, félsík, határegyenes. Ellentett félsíkok.
- Hosszmértékegységek: m, dm, cm, mm, km. Szakasz hosszának mérése adott mértékegységben.
- Kör, körvonal. Háromszög, háromszög-egyenlőtlenség. Háromszög szerkesztése adott oldalakkal. A háromszög kerülete.
- Háromszög átmásolása. Egybevágó háromszögek.

Szög (8 óra)

- Szögszár, szögszár, a szög csúcsa. Egyenesszög.
- A szög tengelye. Derékszög.
- Merőleges, jelölése. Karcolatos vonalzó segítségével merőleges szerkesztése. Derékszögű háromszög.

Párhuzamos egyenesek (14 óra)

- Tetszőleges párhuzamos egyenesek rajzolásának gyakorlása, adott ponton áthaladó adott egyenessel párhuzamos egyenes szerkesztése.
- Párhuzamos egyenesek. Négyzet és téglalap szerkesztése.

Derékszögű négyszögek kerülete és területe (10 óra)

- Négyzet és téglalap kerülete.
- Derékszögű négyszögek területe négyzetes hálón.
- Terület-mértékegységek: cm^2, dm^2, m^2.

Testek (5 óra)

- A testekről tanultak ismétlése és elmélyítése. kocka, téglatest, hasáb, gúla, gömb, henger.
- A kocka, téglatest és a gúla hálója.

Összefoglaló ismétlés (6 óra)

A **2008**-as állami oktatási program tanmenete szerint a tartalmi standardok a következő tananyagot írják elő geometriából (az egyes feltételezhető évfolyamokat vízszintes vonalakkal választjuk el):
Vonalak rajzolása. Egyenes vonal szerkesztése. Geometriai alakok és alakzatok - rajzolás. Néhány síkalakzattal és térbeli testtel való manipulálás.

Pont, egyenes, félegyenes, szakasz. Egyenes és szakasz szerkesztése. Szakasz kijelölése egyenesen, félegyenesen, és adott síkalakzaton. A hosszmérték egységei: cm, dm, m. Szakaszok hosszának mérése. Szakaszok összehasonlítása a hosszuk alapján. Testek építése kockákból minta vagy kép alapján. Egyszerű testek építése.

A szakasz hosszának mérése milliméterekben és centiméterekben. Nagyobb távolságok mérése: kb. (pl. lépéssel) és pontosan méterekben. A távolság becslése. A szerkesztések alapelvei. Egyenesek és szakaszok szerkesztése. Szakaszok kijelölése egyenesen és alakzatokon. Síkalakzatok szerkesztése négyzetes hálón. Síkalakzatok nagyítása és kicsinyítése négyzetes hálón. Építés kockákból a kockaépítmény terve alapján (kép). A kockaépítmény tervének lerajzolása.

A szerkesztések alapelvei. Négyzet és téglalap szerkesztése négyzetes hálón, a csúcsok, oldala szomszédos oldalak megnevezése. A négyzet (téglalap) kerülete mint az oldalak összege (előtanulmányi szinten). Szakaszok hosszának összege és különbsége. A szakasz hosszának többszöröse. Háromszög szerkesztése (tetszőleges, adott oldalhosszokkal), a csúcsainak és oldalainak megnevezése. A háromszög oldalai hosszának mérése centiméter és milliméter pontossággal. A háromszög kerülete mint az oldalak összege (előtanulmányi szinten). Tetszőleges kör, adott középpontú kör és adott középpontú és sugarú kör szerkesztése. A kör és körvonal tulajdonságai. A hosszmérték egységeinek átváltása. Vegyes hosszmérték egységek átváltása. Építés kockákból a kockaépítmény terve alapján (kép). A kockaépítmény tervének lerajzolása.

A **2015**-ös inovált állami oktatási program tanmenete szerint a tartalmi standardok a következő tananyagot írják elő geometriából (az egyes évfolyamokat vízszintes vonalakkal választjuk el):
Síkalakzatok: görbe vonal, egyenes vonal, nyitott és zárt vonal, kör, négyzet háromszög, téglalap. Rajzolás, szerkesztés. Térbeli testek: kocka, henger, gömb. Jobbra, balra, fel, le, felette, alatta, bele, rá, elé, mögé, mellé, közé, előtte, mögötte. Az összehasonlítás fogalmai: hosszabb, rövidebb, magasabb, alacsonyabb, szélesebb, keskenyebb, leghosszabb, legrövidebb, legalacsonyabb. Nem standard hosszmértékek (láb, hüvelyk, tenyér, könyök, egyéb tárgy pl. gémkapocs). Útvesztő, labirintus. Tájékozódás a négyzethálón a $\uparrow \leftarrow \rightarrow \downarrow$jelek segítségével. Ábrák rajzolása, szerkesztése négyzethálón. Egybevágósági leképezés - tengelyes szimmetria (előtanulmányi szinten).

Pont, pont megjelölése nagy nyomtatott betűkkel. Egyenes, félegyenes, szakasz. Pont illeszkedése (rajta van, nincs rajta) adott alakzatra. A szakasz végpontjai. A hosszmérték egységei: milliméter (mm), centiméter (cm), méter (m). Szakaszok hossza centiméterekben. Szakaszok összehasonlítása és rendezése papírszalagok segítségével, méréssel, becsléssel. Mérőeszközök: vonalzó, méterrúd, mérőszalag. Nem standard hosszmértékek: láb, hüvelyk, tenyér, könyök, stb. Zárt vonal. Sokszögek megnevezése: háromszög, négyszög, ... Síkalakzat oldala és csúcsa. Egybevágósági leképezés - eltolás (előtanulmányi szinten). Ős, kép. Építés kockákból.

Szakasz hossza milliméterekben. Hosszúság, szélesség, mérés. A hosszmérték egységei: milliméter (mm), centiméter (cm), deciméter (dm), méter (m), kilométer (km). Távolság, távolság mérése, távolságok összehasonlítása. Becsült hosszúság, valódi hosszúság. A szerkesztés pontossága és tisztasága, megfelelő szerkesztési eszközök választása. A szerkesztés során a biztonság és a higiénia. Négyzetháló. Négyzet és téglalap szerkesztése négyzethálón. A négyzet és a téglalap csúcsainak kijelölése. Síkalakzatok nagyítása és kicsinyítése négyzethálón. Hasonlóság (előtanulmányi szinten). A kocka csúcsa, éle és lapja. Építés kockákból, a kockaépítmény terve (adott alaprajzzal és az egymásra rakott kockák számával) Sorok, oszlopok (kockaépítményeknél).

A hosszmérték egységeinek átváltása (mm, cm, dm, m, km). Vegyes hosszúság egységek és azok átváltása. Sokszögek, sokszögek jelölése ($ABCD$, $ABCDE$, ...). A háromszög, négyzet, téglalap, négyszög ötszög csúcs és oldala. Sokszögek csúcsainak megjelölése nagy nyomtatott betűkkel. Csúcs- és mellékszögek. Átló. Síkalakzatok tulajdonságai: oldalak száma, csúcsok száma, szomszédos és szembefekvő oldalainak a hossza. Kör, körvonal, körző. A körvonal részei ész azok megnevezése: sugár (r), átmérő (d, Φ) és középpont (S). Kör szerkesztése: tetszőleges középponttal és sugárral, adott középponttal és tetszőleges sugárral, adott középponttal és sugárral. A háromszög, négyzet, téglalap oldalainak hossza. Tetszőleges háromszög szerkesztése. Háromszög szerkesztése, ha adottak az oldalai. Szakaszok hosszának összege és különbsége, szakaszok hosszának többszöröse. A négyzet, téglalap és a háromszög területe (előtanulmányi szinten) mint az oldalak hosszának szorzata.

Az alapiskola felső tagozatának geometria tananyaga

A jobb áttekinthetőség kedvéért az egyes témaköröket új sorokban kiemelten tüntetjük fel, majd ezt követően közöljük az elvárt tananyagot részletesen.

A **1986**-os tanmenet szerint:

A szerkesztések alapelvei (10 óra)

Szerkesztési segédeszközök és azok használata. Vonalak típusai, gyakorlás. Műszaki rajz. Párhuzamos és merőleges egyenes szerkesztése (körzővel), négyzet és téglalap szerkesztése.

A szög és annak nagysága (10 óra)

A szög fogalma, a szög átmásolása, szögfelező, a szögfelező szerkesztése (körzővel). A szög nagyságának mérése, a szögmérték egysége, szögmérő. Egyenes-, derék-, hegyes- és tompaszög, hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű háromszög. Mellékszögek és csúcsszögek.

Műveletek szögekkel, sokszögek (10 óra)

Szögek és nagyságaik összeadása és különbsége, a szögek nagyságának kétszerese. Egyállású és váltószögek. Sokszögek. Szabályos hatszög és nyolcszög. A szabályos sokszögek belső szögei.

Síkalakzatok területe, testek felszíne (14 óra)

A síkalakzat területe négyzetes hálón. az SI mértékegységben vett terület-mértékegységek. A téglalap és négyzet területe. Terület- és kerületszámítási szöveges feladatok négyzetekből és téglalapokból összeállított síkalakzatokra. A kocka és a téglatest felszíne. A kocka és a téglatest felszínének kiszámítása számológép segítségével is.

Testek térfogata (10 óra)

Testek térfogata, térfogat-mértékegységek, mértékegységek átváltása. A kocka és téglatest képe szabad párhuzamos vetítésben. A kocka és téglatest térfogata. Szöveges feladatok a kocka és a téglatest térfogatának kiszámítására. Számológép használata a feladatmegoldásban.

Középpontos és tengelyes szimmetria (12 óra)

Középpontos szimmetria, síkalakzat képének megszerkesztése középpontos szimmetriában, középpontosan szimmetrikus síkalakzatok. Tengelyes szimmetria, síkalakzat képének megszerkesztése tengelyes szimmetriában, tengelyesen szimmetrikus síkalakzatok.

Háromszögek (15 óra)

A háromszög belső és külső szögei és tulajdonságaik. Egyenlőszárú és egyenlőoldalú (szabályos) háromszög. A háromszög magasságai. A háromszög súlyvonalai és súlypontja. Középvonala. A háromszög szerkesztése a szög-oldal-szög és az oldal-szög-oldal tétel felhasználásával. A háromszög köré írt és beírt köre. A szerkesztési feladatok megoldásának algoritmizálása.

Topografikus terepmunkák (4 óra)

Állomásozás, körzetek kialakítása. Szakasz kijelölése. Derékszög kijelölése.

Paralelogrammák, hasábok (17 óra)

Paralelogrammák, a paralelogramma átlói, a paralelogrammák tulajdonságai. Téglalap, romboid, négyzet, rombusz. A paralelogramma megszerkesztéséhez vezető szerkesztési feladatok. A szerkesztési feladatok megoldásának algoritmizálása. A paralelogramma területe, a háromszög területe, a hasáb felszíne és térfogata. A paralelogrammák területszámítására, a hasábok térfogat- és felszínszámítására vonatkozó szöveges feladatok megoldása. Számológép használata a feladatmegoldásban.

Kótázott ábrázolás (5 óra)

A kótázott ábrázolás alapszabályai a gépészetben. Szögletes és kerek testek ábrázolása és kótázása. Kótázás az építészetben.

Egybevágóság, egybevágósági leképezések (8 óra)
Geometriai síkalakzatok egybevágósága, háromszögek egybevágósága, a háromszögek egybevágóságára vonatkozó tételek. Egybevágósági leképezések (középpontos és tengelyes szimmetria, eltolás).
Pitagorasz tétele (7 óra)
Pitagorasz tétele és annak fordítottja, Pitagorasz tételének alkalmazása a gyakorlatban. Szöveges feladatok. Számológép használata a feladatmegoldásban.
Kör, körvonal, henger (16 óra)
Kör, körvonal, kör és egyenes kölcsönös helyzete, két kör kölcsönös helyzete. A kör területe, a körvonal hossza (kerület). Körív, körcikk. Szöveges feladatok a kör területének és a körvonal hosszának kiszámítására. Henger, a henger térfogata és felszíne. Szöveges feladatok. Számológép használata a feladatmegoldásban.
Szerkesztési feladatok (14 óra)
Mértani helyek (adott tulajdonságú ponthalmazok). Thalész kör. Egyszerű szerkesztési feladatok. A szerkesztési feladatok megoldásának algoritmizálása. A szerkesztés menetének leírása szerkesztési feladatokban.
Topografikus terepmunkák (4 óra)
Szögek másolása, két olyan pont távolságának meghatározása, amelyek között terepakadály van, a négyszög alakú telek területének meghatározása. *Merőleges vetítés (6 óra)*
Merőleges vetítés két, egymásra merőleges képsíkra, a hasáb és henger összetartozó vetületei, A hasáb és henger felszínének hálója.

Hasonlóság (10 óra)
Síkalakzatok hasonlósága, hasonlósági arány. Háromszögek hasonlósága. A hasonlóság alkalmazása a gyakorlatban. Számológép használata a feladatmegoldásban.
Vetítés két képsíkra (10 óra)
Gúla és kúp, csonka gúla és csonka kúp összetartozó vetületei. A gúla és kúp felszínének hálója. A műszaki rajz alkalmazása.
Testek térfogata és felszíne, a hegyes szög szögfüggvényeinek használata (15 óra)
A téglatest, a kocka, a hasáb és a henger térfogata és felszíne. A gúla és a kúp térfogata és felszíne. Gyakorlati feladatok megoldása számológép használatával is.

A **2008**-as állami oktatási program tanmenete szerint a tartalmi standardok a következő tananyagot írják elő geometriából (az egyes feltételezhető évfolyamokat vízszintes vonalakkal választjuk el):
Síkalakzatok és testek. A szerkesztések alapelvei. Párhuzamosok és merőlegesek a hétköznapi életben. Paralelogramma szerkesztése (csak mint előtanulmány négyzetes hálón). Szakasz hosszának mérése, hosszúságegységek, átváltás a m, dm, cm és mm egységek között a természetes számok halmazán belül. A háromszög, négyzet, téglalap kerülete. Kocka, téglatest (csak mint előtanulmány). Testek építése építőkockákból. Testek építése terv alapján. Síkalakzatok nagyítása és kicsinyítése négyzetes hálón (mint előtanulmány a hasonlósági arányhoz).

A négyzet és téglalap területe A síkalakzatot hozzávetőleges területének meghatározása négyzetes hálón. A négyzet és téglalap kerülete ás területe egész (mint a négyzetháló négyzeteinek száma) és tizedes oldalhosszal. Terület-mértékegységek és azok átváltása – mm^2, cm^2, dm^2, m^2, km^2, ha és a. Négyzetekből és téglalapokból összerakott síkalakzatok kerületének és területének kiszámítása. Kontextuális feladatok.
Szög, a szög nagysága, műveletek szögekkel A szög és annak nagysága. A szög mérésének egységei és eszközei. A szögfelező szerkesztése. Szögek összehasonlítása. A szögek osztályozása a szögek nagysága szerint. A háromszög szögei. A háromszögek osztályozása a szögei szerint. Csúcs és mellékszögek. Műveletek szögekkel. Szögek és nagyságaik összeadása és kivonása. Szögek két-

szerezése és felezése.

A tér ábrázolásának néhány módszere (szabad párhuzamos vetítés, perspektíva). A kocka és a téglatest képének ábrázolása szabad párhuzamos vetítésben, az élek láthatósága. Kockákból és téglatestekből összeállított testek, azok ábrázolása, elölnézet, felülnézet, oldalnézet, A térszemélét fejlesztésére vonatkozó feladatok (egyszerű és összetett testek valós életből származó példái mint előtanulmány). A kocka és téglatest hálója. A kocka és téglatest térfogata. A térfogatmértékegységek és azok átváltása – m^3, dm^3, cm^3, mm^3, *hl liter*, *dl*, *cl*, *ml* és ezek átváltása. A kocka és a téglatest felszíne.

Háromszögek, háromszögek hasonlósága Háromszög szerkesztése (o-o-o, o-sz-o, sz-o-sz), annak egyértelműsége és kapcsolata a háromszögek egybevágóságával. A háromszög belső szögeinek összege. A háromszög-egyenlőtlenség és a háromszög belső szögei összegének felfedezése. Egyenlő szárú és oldalú háromszögek, ezek néhány alaptulajdonságának felfedezése. A háromszög magassága, néhány további szerkesztési feladat.
Paralelogrammák, trapézok, a háromszög területe Párhuzamosokat metsző egyenes. Egyállású és váltószögek párhuzamosoknál. Paralelogrammák és azok párhuzamosságból adódó alaptulajdonságai. A háromszög magasságai. Paralelogrammák szerkesztése. Trapéz. Derékszögű és egyenlőszárú trapéz, egyes tulajdonságaik felfedezése. paralelogrammák és trapézok egyszerű szerkesztései. A rombusz, romboid és a háromszög területe és kerülete. Szöveges gyakorlati feladatok. A trapéz területe és kerülete. Szöveges gyakorlati feladatok.
Kör, körvonal Kör, körvonal. A körhöz húzott érintő, annak kapcsolata a neki megfelelő sugárral. A kör húrja. Körív, körcikk, körszelet, ezek középponti szöge. A kör területe és kerülete (a körvonal hossza) Mint előtanulmány a körgyűrű területe is. Kontextuális feladatok.
Hasábok A hasáb, annak ábrázolása és hálója. A hasáb térfogatára és felszínére vonatkozó képletek használata.

További testek és azok térfogata és felszíne Henger, gúla, kúp és ezek hálója. A henger, gúla, kúp térfogata és felszíne. A gömb és gömbszelet. A gömb térfogata és felszíne. A henger, gúla, kúp és gömb térfogatára és felszínére vonatkozó képletek használata (gyakorlati szöveges faladatokban is).
Szimmetria a síkon Tengelyes szimmetria, szimmetriatengely. Középpontos szimmetria, a szimmetria középpontja. Az alakzat képének megszerkesztése tengelyes szimmetriában. Az alakzat képének megszerkesztése középpontos szimmetriában. Alakzatok középpontos szimmetriájának példái (négyzethálón is).
Pitagorasz tétele Pitagorasz tétele és annak levezetése. Pitagorasz tételének alkalmazása gyakorlati feladatok során.
Háromszögek hasonlósága Síkalakzatok hasonlósága, hasonlósági arány. Szakasz felosztása adott arányban. Háromszögek hasonlósága. Megfelelő matematikai (numerikus) és szerkesztési feladatok megoldása. A hasonlóság alkalmazása magasságok és távolságok mérésekor, valós helyzetű topografikus munkák.

A **2015**-as állami oktatási program tanmenete szerint a tartalmi standardok a következő tananyagot írják elő geometriából (az egyes feltételezhető évfolyamokat vízszintes vonalakkal választjuk el):
Geometria és mérés Egyenes, pont, szakasz, a háromszög és annak csúcsai, oldalai. A négyszög és annak csúcsai, oldalai és átlói, négyzet, téglalap. Kör (körlap) - középpont, sugár és átmérő. Kocka, téglatest, henger, kúp, gúla, gömb. Vonalzó, körző, párhuzamos egyenesek, merőleges, a merőleges egyenes talppontja, paralelogramma, szomszédos oldalak, szembenfekvő oldalak, vízmérték, függőón. Szakasz hossza, a háromszög, négyzet és téglalap oldalainak hossza, kerület, hosszúságegységek – *m*, *dm*, *cm*, *mm* és *km*. Kocka, téglatest, lap, él, csúcs. Vázlat, alaprajz, terv, kódolás. Négyzetes háló, terület, a cm^2, mm^2 terület-mértékegységek mint előtanulmány a négyzetes hálón.

Középpontos és tengelyes szimmetria a síkon Síkalakzatok szimmetriája és egybevágósága, a szimmetria középpontja, középpontos szimmetria, a szimmetria tengelye, tengelyes szimmetria, tengelyesen és középpontosan szimmetrikus alakzatok, ős, kép. Síkalakzat képének megszerkesztése középpontos és tengelyes szimmetriában.

Téglalap, négyzet és a derékszögű háromszög területe tizedes számokban, a terület mértékegységei A síkalakzatok, négyzet, téglalap, sokszög, terület, telek, felület, négyzetes háló egysége. Területmértékegységek és azok átváltása: hektár, ár, km^2, m^2, dm^2, cm^2, mm^2. Szöveges képletek a négyzet, a téglalap és a derékszögű háromszög területének kiszámítására.
Szög, a szög nagysága, műveletek szögekkel A szög és annak nagysága. A szög mérésének egységei (fok, perc), szögmérő. A szög szárai, a szög csúcsa. A szögfelező és annak tulajdonságai. Szögek összehasonlítása. Egyenesszög, derékszög, hegyes és tompa szög, nem konvex szög. A háromszög belső szögei, a háromszög belső szögei összegére vonatkozó összefüggés felfedezése. Derékszögű, hegyesszögű és tompaszögű háromszög. Csúcs- és mellékszögek. Szögek nagyságainak összeadása és kivonása.
Háromszög, háromszögek egybevágósága Háromszög és annak csúcsai, oldalai és belső szögei. Hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű háromszög. Vázlat, szerkesztés. Két háromszög egybevágósága, a o-o-o, o-sz-o, sz-o-sz tételek. A háromszögek szerkesztése a o-o-o, o-sz-o, sz-o-sz tétel szerint. A háromszög egyenlőtlenség ($a + b > c,\ a + c > b,\ b + c > a$). Egyenlő szárú és oldalú háromszögek, az egyenlő szárú háromszög szárai, alapja és főcsúcsa. Az egyenlő szárú és oldalú háromszögek alaptulajdonságának felfedezése (oldalai nagysága, szögei nagysága). A háromszög magassága (magasságvonal, magasság), a magasságvonal talppontja, a háromszög magasságvonalainak metszéspontja.

A téglatest és a kocka térfogata felszíne tizedes számokban, a térfogat mértékegységeinek átváltása A tér, a leképezés őse, képe, vázlat. Szabad párhuzamos vetítés. perspektíva. Kocka, téglatest ábrázolása láthatósággal. Testek, egyszerű és összetett testek. Elölnézet, oldalnézet, felülnézet. A téglatest és a kocka hálója. A téglatest és a kocka felszíne, a felszín mértékegységei. A téglatest és a kocka térfogata. A térfogat-mértékegységek és azok átváltása: m^3, dm^3, cm^3, mm^3, km^3, l, dl, cl, ml, hl és ezek átváltása. Térszemlélet és annak fejlesztésére szolgáló feladatok.

Paralelogrammák, trapézok, paralelogrammák, trapézok és a háromszög területe és kerülete Párhuzamosság, párhuzamos egyenesek, metsző egyenesek. merőleges összekötő, párhuzamosokat metsző egyenes. Egyállású és váltószögek és azok tulajdonságai. Négyszögek, paralelogrammák, négyzet, rombusz, téglalap, romboid és ezek alaptulajdonságai (az oldalakról, belső szögekről, az átlókról és metszetükről). A paralelogramma (négyszög) oldalai, oldalainak hossza, belső szögei, a paralelogramma magasságai, átlók, átlók metszéspontja, a paralelogramma tulajdonságai. A négyszög belső szögei összege. A trepéz alapjai, szárai, magassága, általános, derékszögű és egyenlőszárú trapéz. A paralelogramma (rombusz, romboid) területe és kerülete, A trapéz és a háromszög területe (a módszer felfedezése)
Kör, körvonal Kör, körvonal, körgyűrű. A kör középpontja. A kör sugara és átmérője és ezek kapcsolata. A kör és az egyenes kölcsönös helyzete. Szelő, érintő, húr és ezek tulajdonságai. A kör húrjának távolsága a középpontjától. Thalész kör. Körív, középponti szög, körcikk, körszelet. Ludolf-féle szám és annak közelítő értéke ($\pi \doteq 3,14$ vagy $\pi \doteq \frac{22}{7}$). A kör területe és kerülete, a körvonal hossza.
Hasábok Test, kocka, téglatest, csúcsok, élek, lapok. A hasáb (egyenes hasáb, szabályos hasáb, háromoldalú, négyoldalú, hatoldalú, ...). Háló, alaplap, palást és tulajdonságaik. Felszín, térfogat, képletek a kiszámításra. Terület egységek (m^2, dm^2, cm^2, mm^2, ldots) és térfogat egységek (m^3, dm^3, cm^3, mm^3, ldots).

Pitagorasz tétele Derékszögű háromszög, annak alapelemei és tulajdonságai - derékszög, befogók, átfogó, a két hegyes szög összege 90°. Pitagorasz tétele. A $c^2 = a^2+b^2$, $a^2 = c^2-b^2$, $b^2 = c^2-a^2$, $a = \sqrt{c^2 - b^2}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, és $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ összefüggések. Pitagorasz tételének jelentése és alkalmazása. Ismeretlen kifejezése az összefüggésből.

Gúla, henger, kúp és gömb és azok térfogata és felszíne (Forgás)henger, (forgás)kúp, gömb, gömbfelület. Gúla (szabályos, háromoldalú, négyoldalú, ...). Háló, alaplap (fedőlap), palást, magasság, csúcs. A kúp alkotója. A gömb középpontja, sugara és átmérője, Térfogat és felszín.
Háromszögek hasonlósága Síkalakzatok. Síkalakzatok hasonlósága, a hasonlóság lényege. Hasonlósági arány. Háromszögek hasonlósága. A háromszögek hasonlóságára vonatkozó tételek (o-o-o, o-sz-o, sz-sz). A háromszögek hasonlósága a gyakorlatban.

A gimnáziumok geometria tananyaga

Az **1982**-ben elfogatott gimnáziumi tanmenetek előírt tartalmi előírt geometria tananyaga az egyes évfolyamok, témakörök szerint (az egyes évfolyamokat vízszintes vonallal választjuk el):
A geometria alapjai - síkmértan (22 óra) Konvex ponthalmazok. Pontok és egyenesek kölcsönös helyzete, alakzatok szögeinek tulajdonságai, a háromszög oldalaira és szögeire vonatkozó tételek. Szerkesztési feladatok megoldása. Egybevágósági leképezések a síkon – középpontos szimmetria, tengelyes szimmetria, eltolás, elforgatás. Leképezések kompozíciója. Hasonlósági leképezések a síkon. Geometriai alakzatok egybevágósága és hasonlósága.

A geometria alapjai - térmértan (28 óra) Pontok, egyenesek és síkok kölcsönös helyzete, illeszkedés, párhuzamosság, egysíkúság, kitérő egyenesek, merőlegesség, távolságok. Egybevágósági leképezések a térben – középpontos és sík szerinti szimmetria, két sík szerinti szimmetria kompozíciója. Testek (kocka, tetraéder, gúla, hasáb, gömb, henger, kúp, csonkagúla, csonkakúp) és azok tulajdonságai, metrikus feladatok. Szerkesztési feladatok, szögletes testek síkmetszetei.

Analitikus geometria (40 óra) Vektoralgebra: Karteziánusi koordináta-rendszer. Két pont távolsága. Vektor, a vektor nagysága. Vektorok összeadása, vektor szorzása valós számmal. Vektorok lineáris függetlensége és összegfüggősége. Két vektor skaláris szorzata, két vektor szöge, vektorok merőlegessége. Vektori szorzat és annak geometriai értelmezése. A skaláris és a vektori szorzat alkalmazása terület és térfogat számításában.
Lineáris alterek analitikus geometriája: Geometriai alakzatok egyenletei. Az egyenes iránytényezős és általános egyenlete. Az egyenes és a sík paraméteres egyenletei, a sík egyenletei, féltér. Pontok, egyenesek és síkok kölcsönös helyzete. Pontok, egyenesek és síkok távolsága. Két egyenes szöge, egy egyenes és egy sík szöge, kt sík szöge.
Metrikus geometria (30 óra) Távolságok segítségével definiált adott tulajdonságú ponthalmazok (mértani helyek). Kör, ellipszis, hiperbola, parabola, ezek definíciói, alapvető helyzeti és metrikus tulajdonságai. Egyenes és kúpszelet kölcsönös helyzete. Gömbfelület, forgási hengerfelület. A műszaki gyakorlatban használt görbék és felületek.

Geometriai leképezések (15 óra) Ponthalmazok felírása a komplex számsíkon. Síkbeli egybevágósági leképezések. Egybevágósági leképezések egymásutánja. Síkbeli hasonlósági leképezések. A komplex számokkal végzett műveletek és a síkbeli leképezések közötti összefüggések.

A **2008**-as reformot követő tanmenet szerint csak az első három évben szerepel geometria, ami a tanmenet az alábbiakban határoz meg (az egyes (feltételezett) évfolyamokat vízszintes vonallal választjuk el):
Alapvető síkalakzatok. Mérés. Leképezés a síkba, párhuzamos vetítés. Szögletes (síklapokkal határolt) testek, azok felszíne és térfogata.

Síkmetszetek. Kerek testek, azok felszíne és térfogata, a levezetés gondolatmenete a Cavalieri-féle elv alapján.

Alapvető síkalakzatok. Mértani helyek, szerkesztések. Mérés, becslés. A hegyes szög szögfüggvényei. Egybevágóság és hasonlóság.

A **2015**-ös innováció nem használ évfolyamok szerinti lebontást. A geometria és mérés te-

rületre az alábbi témaköröket és azokhoz a következő tartalmi standardokat határozza meg (a témaköröket dőlt betűkkel emeljük ki):
Alapvető síkalakzatok és tulajdonságaik
Fogalmak: Pont, egyenes, félegyenes, szakasz, a szakasz felezőpontja, félsík, párhuzamos és metsző egyenesek, szög (hegyes, derék- és tompa), a szög csúcsa és szárai, szögmérték: fok, perc, másodperc, mellék-, csúcs-, egyállású és váltószögek, szakaszfelező merőleges, szögfelező, merőleges egyenes. Kör, a kör középpontja, sugara, átmérője, körív, érintő adott körhöz, körcikk, körszelet, körgyűrű. Háromszög, hegyesszögű, derékszögű, tompaszögű, egyenlő-szárú és egyenlőoldalú háromszög, csúcs, oldal, és magasság, súlyvonal, súlypont, a háromszög körülírt és beírt köre.
Tulajdonságok és kapcsolatok: Párhuzamos egyeneseknél az egyállású és váltószögek egyenlőek; a mellékszögek összege 180°; a csúcsszögek nagysága egyenlő; háromszög-egyenlőtlenség; a háromszögben a nagyobb (egyenlő) oldallal szemben nagyobb (egyenlő) szög fekszik; a háromszög területének kifejezése az oldal és a hozzá tartozó magasság segítségével. Pitagorasz tétele, Eukleidész tételei. A derékszögű háromszög goniometriája. Egybevágó és hasonló háromszögek, a háromszög egybevágóságára és hasonlóságára vonatkozó tételek, a hasonló háromszögek megfelelő oldalai, megfelelő szögei és területeik közötti kapcsolatok; a kör érintési pontba húzott sugara és az érintő merőlegessége; Thalész tétele; az egyenes és a kör kölcsönös helyzetének függése az egyenes középponttól mért távolságtól és a sugártól; érintkező körök érintési pontja a középpontok összekötő egyenesére illeszkedik, két kör kölcsönös helyzetének függése a sugarak és a középpontok távolságától; a kör területére és kerületére, valamint a körív hosszára és a körcikk területére vonatkozó összefüggések; a paralelogrammák szemben fekvő oldalai egyenlő hosszúak és párhuzamosak, az átlói kölcsönösen felezik egymást, szemközti csúcsaik megegyeznek; a négyzet és téglalap átlói egyenlő hosszúak, átlóik kölcsönösen merőlegesek egymásra; A szabályos sokszögnek van beirt és köré írt köre; az egyenlő szárú trapéz egyenlő hosszúk az átlók és egyenlőek az alapon fekvő szögek; a paralelogramma területének kifejezése az oldal és a hozzá tartozó magasság segítségével; a trapéz területének kifejezése az alapok és a magasság segítségével.
Mértani helyek
Fogalmak: vázlat, elemzés, szerkesztés, szerkesztés menete.
A háromdimenziós tér ábrázolása
Fogalmak: (szabad párhuzamos) vetítés, a térbeli test vetülete a síkba, oldalnézet, felülnézet előnézet. Pont, egyenes és sík a térben, párhuzamos, metsző és kitérő egyenesek, egyenes és sík kölcsönös helyzete, síkok kölcsönös helyzete, síkok metszésvonala, testek síkmetszete.
Tulajdonságok és kapcsolatok: a szabad párhuzamos vetítés megőrzi az osztóviszonyt és a párhuzamosságot; a párhuzamos (metsző) egyenesek egy síkban fekszenek, a kitérő egyenesek nem egy síkban fekszenek; egy sík két párhuzamos síkot párhuzamos egyenesekben metsz.
Testek, azok térfogata és felszíne
Fogalmak: testek, csúcs, él, lap, kocka, a kocka hálója, hasáb, egyenes és szabályos hasáb, téglatest, gúla, szabályos gúla, a gúla alaplapja és magassága, tetraéder, szabályos tetraéder, gömb, henger, kúp, a test térfogata és felszíne.
Tulajdonságok és kapcsolatok: az egyenes hasáb, gúla, kúp, henger és gömb térfogatának és felszínének kiszámítására vonatkozó képletek.
Mérés

Az állami oktatási program nem tartalmazza (vagy nem kellő mélységben) az alábbi témaköröket, de a matematika érettségi követelményei között szerepel:
Szinusz- és koszinusztétel és ezek alkalmazása az általános háromszögben. Kerületi és középponti szög. Két egyenes szöge, távolságok térben (két pont, egyenes és pont, két párhuzamos egyenes). Analitikus geometria (koordináta-rendszer, vektor, skalárszorzat, egyenes és sík egyenletei, a kör egyenlete, irány- és normálvektor, távolságok és szögek kiszámítása, egyenes és kör kölcsönös helyzete). Egybevágóság és hasonlósági leképezések.

A geometria tananyagában bekövetkezett változásokról

Az előző fejezetek alapján látható, hogy a szlovákiai közoktatásban olyan szervezési változások zajlottak, ami a matematika órák számának csökkenéséhez vezet(het)ett. A tanmenetek szintjén látható, hogy a matematika tárgyon belül is számos változás történt az egyes témakörök között, és egy egyértelműen látható hangsúly-eltolódás történt a kombinatorika, valószínűségszámítás és statisztika irányába. A geometria reprezentáltsága nem nőtt, sőt az előzőekben bemutatott változások alapján látható a tanmenetek egyes témaköreihez előírt témakörökön belül is áthelyeződtek a súlyok. Egyes témakörök teljes mértékben kimaradtak (pl. analitikus geometria), mások áthelyeződtek (pl. Pitagorasz tétele).

Mielőtt az egyes szinteket külön-külön is megvizsgálnánk a geometria tananyag változásainak szempontjából, pár általános észrevételt ejtsünk meg.

A tanítási folyamat szerves részét képzi/kell, hogy képezze a megszerzett ismeretek ellenőrzése. A matematikában véleményünk szerint ez még inkább domináns kérdés, hiszen a fogalmak, ismeretek és köztük lévő kapcsolatok hálója folyamatosan épül, és ha valakinél már az alapfogalmak, kapcsolatok szintjén problémák vannak, akkor erre nem lehet szisztematikus, használható tudást építeni. Az ellenőrzés individuális formája (feladatmegoldás, feleltetés) jó analitikus eszköz a matematika tanár számára, mert személyre mérten fel tudja mérni a tanítvány ismereteinek egyes szintjeit is, és az annak során felismert, kiderült ismereti deformitásokat akkor, ott, a lehető legadekvátabb módon és módszerrel tudja a tanár korrigálni. Hátránya viszont a folyamat időigényessége, hogy a tanár egy személlyel foglalkozik alaposan, ezért alkalmazzák általában az ellenőrzés tömeges formáit (az előismeretek óra eleji visszakérdezése, írásbeli dolgozat). Az írásbeli dolgozatok során a tanulók egyes tananyagbeli ismereteit igyekszünk felmérni. Az egyes témakörök témazáró dolgozatai monotematikusak, de átfogóbb dolgozatok (negyedéves, országos felmérés, felvételi) esetében a tananyagban szereplő geometriát is feladatokkal kéne képviselni. És itt jön a képbe a matematika és a geometria egyes részeinek a különbözősége.

A matematikát általában az emberek az általuk matematikából tanultakkal, tehát a matematika tantárggyal azonosítják, azt pedig általában a számolással, számítási műveletek elvégzésével. Ezek a műveletek algoritmikusak és alkalmazásra irányulóak.

A klasszikus (euklideszi értelemben vett) geometria az alapfogalmak (pont, egyenes, sík) a köztük lévő kapcsolatok (relációk: illeszkedés, rendezés, ...) segítségével további fogalmakat épít ki, majd a köztük lévő kapcsolatokat és tulajdonságokat rendszerezi, miközben a szemléltetés, a vizsgálat fő eszköze a szerkesztés. Az alapszerkesztéseket a tanulók már az alapiskola alsó tagozatán megtanulják alkalmazni. Ezt követően a szerkesztési geometria magasabb kognitív szintet elérő lépéseket vár el egy-egy feladat megoldása során, és jól felépített feladatok sorával tudunk megfelelő gondolati sémákat kialakítani. Részben ezért igényesek a felmérő dolgozatokban a geometriai feladatok, másrészt viszont a megoldási terv megvalósítása is időigényes. Harmadrészt pedig egy szerkesztési feladat megoldása helyességének ellenőrzése is általában igényesebb lehet, mint más feladatoknál.

A geometria szerkesztési feladatait gyakorlati felhasználhatóságát sokan a köznapi életben megkérdőjelezik, mondván, hogy nincs szükség a valós életben arra, hogy valaki meg tudjon geometriai feladatokat szerkeszteni. Véleményünk szerint azonban a geometriai szerkeszthetőséggel kapcsolatos tudás elsajátításával egy csomó olyan gondolkodási séma, problémamegoldási stratégia tanulható, ami a matematikán belül, de azon kívül is sikeresen alkalmazhatóak.

Valószínűleg a fentebb írtak lehetnek az okai, hogy a dolgozatokból, a felmérésekből és a tananyagból is kiszorulóban van a szerkesztési geometria. Elég csak megnézni az országos, egész korosztályt lefedő kötelező mérések tesztjeit (lásd a következő fejezetekben), azokban vagy egyáltalán nincs szerkesztési feladat, vagy ha van is, az is csak egy egyszerű, alkalmazás szintű feladat.

Mivel a szerkesztési geometria a záró központi felmérésekben nem vagy csak minimálisan szerepelt, ennek is betudható, hogy mind a tantervi, tanmeneti, mind az egyes pedagógusok által megvalósított oktatási tevékenységekben is a geometria ide kapcsolódó témakörei háttérbe szorultak (a tantervi, tanmeneti változások az előbbiekben láthatóak, amelyeket szintek alapján az alábbiakban fogunk összehasonlítani).

Véleményünk szerint a szerkesztési geometria tantervi, tanmeneti szinten történt visszaszorításának egyik leginkább szembetűnő vonatkozása a mértani helyekkel való foglalkozás kimaradása. Meglehetősen nehéz felhasználható tudást kialakítani anélkül, hogy értenénk a fogalmak közötti kapcsolatokat. Például a körrel kapcsolatban a tanulók tanulnak a középpontról, a sugárról, a körvonalról és a körről (körlap), de a kör mint mértani hely (azon pontok halmaza a síkon, amelyek egy adott ponttól (középpont) való távolsága (sugár) állandó) az a kapcsolati ismeret, ami a vele kapcsolatos ismereteket összeköti. Ezt a kapcsolati ismeretet használjuk a szerkesztési feladatokban, pl. a háromszög szerkesztésekor három oldalból – az egyik felvett oldal végpontjai a középpontjai azon oldal hosszának megfelelő sugarú köröknek, amelyek metszéspontja a harmadik csúcs. Úgy gondoljuk az ismeretek sikeres és tartós alkalmazhatóságához a Hogyan? mellett a Miért? kérdésre is tudnia kéne a diáknak választ adni.

A szerkesztési feladatok megoldását általában a vázlat, elemzés, szerkesztés, szerkesztés menete és a megvitatás lépésekben hajtjuk végre, amelyek láthatóan, tagoltan megfeleltethetők Pólya feladatmegoldási stratégiáinak. Egy jó vázlat alapján és a feladathoz kapcsolódó ismeretek alapján megoldási tervet készítünk (elemzés), a szerkesztésben ezt a tervet hajtjuk végre, majd a megvitatásban megvizsgáljuk, hogy a kapott megoldásunk helyes-e, van-e más megoldás is, esetleg azt is még, hogy mi a megoldhatóság feltétele.

A geometria tananyagi változásai az alsó tagozaton Az alsó tagozatos geometria tananyag a geometria alapfogalmaira koncentrál, egyes síkalakzatok, testek tulajdonságai mellett a szerkesztések alapjaival is foglalkozik. A geometria alapfogalmai: a pont, az egyenes és a sík meglehetősen absztrakt fogalmak (a pont az, aminek nincs kiterjedése, az egyenes végtelenül hosszú, . . .). A szerkesztési alapjártasságok pedig a tanulók finommotorikus képességeik fejlesztésében játszhatnak szerepet.

Ami a tantervi, tanmeneti változásokat illeti, látható azokban:

- a mérés-központúság megjelenése: az egyes hosszúság-mértékegységek átváltása (ez korábban a felső tagozat tananyaga volt), nem standard hosszúság mértékegységek (2008 előtt ilyenek nem szerepeltek),
- a szerkesztési rész későbbre sorolása (2008 előtt már másodikban megjelent a szerkesztési segédeszközök használata, szerkesztettek is egyszerű feladatokat, 2008 után mindez a negyedik évfolyamba került, 2015 után harmadiktól foglalkoznak vele),
- a térszemlélet fejlesztés lehetősége (2008 előtt a síkalakzat és test megkülönböztetése, valamint egyes testek tulajdonságai szerepeltek csak a tananyagban, 2008 után három évfolyamban is szerepelt testek építése kockákból).

A geometria tananyagi változásai a felső tagozaton A 2008 előtti tanmenetek tartalmaztak még külön, komplexen szerkesztésekkel, mértani helyekkel foglalkozó témaköröket, ami azt követően esetleg más tananyagokban szerepel. A 2008 utáni tanmenetek inkább a számítási kompetenciákra helyez hangsúlyt. A 2015-ben elfogadottakban nem csupán a geometriai fogalmakra, hanem a köztük lévő kapcsolatokra is koncentrál.

A geometria tananyagi változásai a gimnáziumokban Komoly tartalmi összehasonlítást nem igazán tudunk itt tenni, hiszen a 2008-as tanmenetek meglehetősen szűkszavúak. Az analitikus geometria azonban innentől kikerül az előírt tananyagból, mégha az érettségi követelményei között szerepel is. A 2015 utáni tantervekben viszont megjelennek külön témakörként a mértani helyek.

2. fejezet

A szlovákiai matematikai ismeretek hazai és nemzetközi méréseinek eredményei

2.1. Hazai mérések

Szlovákia Oktatási Minisztériuma 2008 szeptember 1-ei hatállyal hozta létre az Oktatás Certifikált Méréseinek Nemzeti Intézetét (Národný ústav certifikovaných meraní vzdelávania – a továbbiakban mint „NÚCEM") mint önálló jogalanyiságú állami költségvetési szervezetet. Az intézet alapvető feladatai közé az érettségi vizsgák külső (központi) részének és a belső részének írásbeli formájának bebiztosítása, az alapiskolák 5. és 9. évfolyama számára központi tesztelésének bebiztosítása, valamint azon nemzetközi mérések bebiztosítása tartozik, amely programokba Szlovákia bekapcsolódik. Az intézet webszékhelye: www.nucem.sk.

Korábban a hasonló jellegű feladatokat a minisztérium más szervei mint például az Állami Pedagógiai Intézet (Štátný pedagogický ústav – a továbbiakban mint „ŠPÚ"), az Állami Tanfelügyelőség (Štátna školská inšpekcia), illetve az azóta már beolvasztott Iskolaügyi Információk és Előjelzések Intézete (Ústav informácií a prognóz školstva – a továbbiakban mint „UIPS") végezték. Mivel az alapiskolai központi mérések 2008 utánra datálhatók csak, továbbá az ezt megelőző időszakból nem találhatóak meg nyilvános elérhetőségű országos szintű felmérések, összehasonlítások eredményei, ezért csak a 2008 utáni NÚCEM által közzétett anyagok matematikai méréseinek adatait ismertetném. Először a haza adatokat ismertetném, s csak utána számolnék be a nemzetközi mérések eredményeiről. A hazai adatokat az iskolai szintek sorrendjében mutatnám be.

2.1.1. Az alapiskolák alsó tagozatának matematikai ismereteinek tesztelése

A „Testovanie 5"-nek nevezett felmérés az alapiskolák (az általános iskolák) első négy évfolyamának, az ún. alsó tagozatnak az átfogó tesztekkel történő objektív felmérésére hivatott, amit a diákok az 5. osztályba belépésüket követően írnak meg. Az első három évben pilot üzemben működött, ami arra volt hivatott, hogy a statisztikailag korrekt, szakmailag, tartalmilag is megfelelő mérőeszközöket, teszteket állítsanak össze. Ennek érdekében igyekeztek olyan mintákat (iskolákat és diákjaikat) választani, amelyek az országos népesség eloszlását követék. A pilot tesztelésekbe nem voltak bevonva mentálisan sérült és egészségileg hátrányos helyzetű diákok. A 4. évtől a tesztelés a teljes populációt lefedővé vált, és megjelent a papír alapú tesztkitöltési lehetőség mellett az elektronikus tesztelés lehetősége is. A tesztek kitöltésére 60 perc állt a diákok rendelkezésére.

Az alábbiakban közöljük az egyes felmérések eredményeit, úgy ahogy azt a lebonyolító intézet jelentései tartalmazzák.

Tekintettel a jelentések terjedelmére igyekeztünk abból csak a lényegi dolgokat és adatokat kiemelni. Saját meglátásainkra, elemzéseinkre és véleményünkre majd azt ezt követő fejezetben térünk rá.

Az alapiskola alsó tagozatának első mérését **2012**-ben végezték. Ez csak egy pilot-felmérés volt, ahol szlovák nyelvből és irodalomból valamint matematikából, a magyar tanítási nyelvű iskolákban szlovák ás magyar nyelvből és irodalomból írtak 49 kiválasztott iskola 5. osztályos diákjai egy tesztet. A pilot tesztelés célja a mérőeszközök ellenőrzése volt. Az eredményekről egy sajtóközlemény érhető el ("Pilotné overovanie testovacích nástrojov pre Testovanie 5 v školskom roku 2012/2013", 2013) 4 tesztfüzetben (variánsban), mindegyikben 30 tesztmező kitöltését várták el, amelyet az állami oktatási program 5 témaköréből származó feladatokkal töltöttek ki az alábbi eloszlásban:

Számok, változó és számokkal való műveletek	56,67%
Sorozatok, kifejezések, függvények, táblázatok, grafikonokban	6,67%
Geometria és mérés	23,33%
Kombinatorika, valószínűség, statisztika	6,67%
Logika, indoklás, bizonyítások	6,67%

Az egyes tesztváltozatokból a diákok átlagos eredményessége 50,6% és 53,6% volt, a mérés megbízhatóságét (reliabilitás) jónak értékelték. Magáról a tesztről és a kérdésekről többet nem mondhatunk el, mivel azok nyilvánosan nem érhetők el.

2013-ban folytatódott még a pilot felmérés, 89 kiválasztott iskola 2021 diákja írt egy tesztet az oktatási nyelvből és irodalomból valamint matematikából. Közzétételre került többek a teszt, a megoldókulcs, és egy részletes jelentés is tesztelésről (Alföldyová, 2014).

A jelentés a folyamat leírásán, a kapott eredmények analízisén és interpretációján kívül ajánlásokat is megfogalmaz az oktatás minőségének javítására. Ennek köszönhetően jóval többet tudhatunk meg a tesztről. A teszt 30 feladatot tartalmazott, ebből 20 nyitott kérdés volt, ahol egy rövid számszerű eredményt kellett megadni, 10 pedig zárt, feleletválasztós (4 lehetőségből) kérdés volt. Az érvényes alsó tagozatos oktatási standardoknak és teljesítményi követelményeknek megfelelően az állami oktatási program matematika tárgyának 5 témaköréből származó feladatokkal töltöttek ki az alábbi eloszlásban:

Számok, változó és számokkal való műveletek	50,0%
Sorozatok, kifejezések, függvények, táblázatok, grafikonokban	10,0%
Geometria és mérés	23,3%
Kombinatorika, valószínűség, statisztika	6,7%
Logika, indoklás, bizonyítások	10,0%

A matematikai kontextusú és a valós életből származó kontextusú feladatok arányát azonosnak határozták meg. A kognitív igényesség meghatározásakor a szerzők a kognitív célok revideált Bloom taxonómiából indultak ki. Az ismeretek szintjén a feladatok 1/3-a tárgyi ismereteket kért, 60%-a konceptuális ismereteket, 6,7%-a procedurális ismereteket és nem tartalmazott metakognitív ismeretet igénylő ismereteket. A kognitív folyamatok szintjén a feladatok közül egy sem irányult a megjegyzésre sem az alkotásra, 26,7% a megértésre, 36,7% az alkalmazásra 23,3% az analízisre és 13,3% az értékelésre irányult.

Az átlagos eredményesség matematikából 58,4% volt. A valós életből származó kontextusú feladatok esetében ez 53,2% volt míg az iskolai matematikai kontextusú kérdések esetében 63,6%.

Témakörönkénti bontásban legeredményesebbnek a geometriai témakört találták (61,3%) míg a legkevésbé sikeresnek a kombinatorika, valószínűség, statisztika témakört (43,4%). Mindezek ellenére az egyik geometriai feladat megoldása volt a legkevésbé sikeres.

A megfogalmazott ajánlásokban kiemelik az értő olvasás hiányából adódó, a valós életből származó feladatok, valamint a diákok logikus gondolkodását fejlesztő feladatok problémakörét.

2014-ben 116 iskola 3566 diákja vett részt a felmérésben. Közzétételre került többek a teszt, a megoldókulcs, és egy részletes jelentés is tesztelésről (Alföldyová, 2015).

A jelentés a folyamat leírásán, a kapott eredmények analízisén és interpretációján kívül ajánlásokat is megfogalmaz az oktatás minőségének javítására. Az előző évi teszthez képest két feladattal több volt a számokkal és azokkal való műveletekkel foglalkozó feladatokból és eggyel-

eggyel kevesebb a geometria illetve a logikai témakörből.

A kognitív igényesség meghatározásakor a szerzők a kognitív célok revideált Bloom taxonómiából indultak ki. Az ismeretek szintjén a feladatok 10%-a tárgyi ismereteket kért, 46,7%-a konceptuális ismereteket, 43,3%-a procedurális ismereteket és nem tartalmazott metakognitív ismeretet igénylő ismereteket. A kognitív folyamatok szintjén a feladatok közül egy sem irányult a megjegyzésre sem az alkotásra, 6,7% a megértésre, 40% az alkalmazásra 43,3% az analízisre és 10% az értékelésre irányult. Az átlagos eredményesség matematikából 55,9% volt. A valós életből származó kontextusú feladatok (17) esetében ez 50,5% volt míg az iskolai matematikai kontextusú kérdések (13) esetében 63,1%.

Témakörönkénti bontásban legeredményesebbnek a számok, változó és számokkal való műveletek témakört találták (63%) míg a legkevésbé sikeresnek a logika, indoklás, bizonyítások témakör bizonyult (33,9%).

A megfogalmazott ajánlásokban szintén kiemelik az értő olvasás hiányából adódó, a valós életből származó feladatok, valamint a diákok logikus gondolkodását fejlesztő feladatok problémakörét.

2015-ben egész országos tesztelés készült november 25-én, 1457 iskola 43 148 diákja vett részt a felmérésben. A tesztelés elektronikus környezetben is zajlott. Közzétételre került többek a teszt, a megoldókulcs, és egy részletes jelentés is tesztelésről (Alföldyová, Khernová, Timárová, & Polgáryová, 2016).

A jelentés a folyamat leírásán, a használt teszt jellemzésén, a kapott eredmények analízisén és interpretációján kívül ajánlásokat is megfogalmaz az oktatás minőségének javítására.

A korábbi években a pilot tesztelés alapján kipróbált és bevezetett tesztek mintájára azok eredményei alapján módosított tartalmi összetevőkkel zajlott a felmérés. Az érvényes alsó tagozatos oktatási standardoknak és teljesítményi követelményeknek megfelelően az állami oktatási program matematika tárgyának 5 témaköréből származó 30 feladatból álló teszt került megíratásra (ebből 20 nyitott és 10 zárt, feladatválasztós kérdés) az alábbi eloszlásban:

Számok, változó és számokkal való műveletek	47,7%
Sorozatok, kifejezések, függvények, táblázatok, grafikonokban	10,0%
Geometria és mérés	23,3%
Kombinatorika, valószínűség, statisztika	10,0%
Logika, indoklás, bizonyítások	10,0%

A kognitív igényesség meghatározásakor a szerzők a kognitív célok revideált Bloom taxonómiából indultak ki. Az ismeretek szintjén a feladatok 13%-a tárgyi ismereteket kért, 50%-a konceptuális ismereteket, 36,7%-a procedurális ismereteket és nem tartalmazott metakognitív ismeretet igénylő ismereteket. A kognitív folyamatok szintjén a feladatok közül egy sem irányult a megjegyzésre sem az alkotásra, 16,7% a megértésre, 36,7% az alkalmazásra, 36,7% az analízisre és 10% az értékelésre irányult. A matematika tesztben összesen 43 143 diák alsó tagozatos matematikai tudását igyekeztek felmérni, ebből 40 911 diáknál papír alapú, 2 223 pedig elektronikus tesztet töltött ki. A diákok átlagos eredményessége 62% volt, nemre függetlenül ugyanolyan eredményt elérve. A papír alapú tesztkitöltő diákok eredményessége 61,5% volt, az elektronikusan tesztelőké 70,4%. Az állami iskolák diákjai (a populáció 92,5%-át kitevő) átlagos eredményessége 61,4% volt, az egyházi fenntartású iskoláké 68,1%, míg a magániskolák (a populáció 1,4%-a) 73%. Az egészségileg hátrányos helyzetű diákok (összesen 919) átlagos matematikai eredményessége 50,7%, míg a szociálisan hátrányos helyzetű diákok (a populáció 5,8%-a) tárgyilag erősen jelentősen szignifikánsan alacsonyabb 28,6 % eredményességet értek el, mint korosztályuk nem hátrányos helyzetű tagjai (35,4%-kal kisebb).

A magyar tanítási nyelvű iskolákban a tanulók magyar fordítású tesztet tölthettek ki. A szlovák tanítási nyelvű iskolákban a diákok átlagos eredményessége 62,8%-os, a magyar tanítási nyelvű iskolákban 50,3%-os volt. Ez elismerten szignifikáns statisztikai különbség.

A valós életből származó kontextusú feladatok (17) esetében ez 56,2% volt míg az iskolai matematikai kontextusú kérdések (13) esetében 69,5%. Érdekes adat, hogy a városi iskolákban az eredményesség 65,4% volt, míg a vidéki iskolákban 56,1%, s a város iskolák diákjai közül is jellemzően a nagyobb városok diákjai teljesítettek jobban.

Témakörönkénti bontásban legeredményesebbnek a sorozatok, kifejezések, függvények, táblázatok, grafikonok témakört találták (74,7%) míg a legkevésbé sikeresnek a logika, indoklás, bizonyítások témakör bizonyult (42,4%).

A jelentés első alkalommal egyes teszt-feladtok elemzésével is foglalkozik. A megfogalmazott ajánlásokban újfent kiemelik az értő olvasás hiányából adódó, a valós életből származó feladatok, a szöveges feladatok, valamint a diákok logikus gondolkodását fejlesztő feladatok problémakörét.

2016-ban is egész országos tesztelés készült november 23-án, 1485 iskola 45 299 diákja vett részt a felmérésben. A tesztelés elektronikus környezetben is zajlott. Közzétételre került többek a teszt, a megoldókulcs, és egy részletes jelentés is tesztelésről (Alföldyová, Khernová, Timárová, & Polgáryová, 2017).

A jelentés a folyamat leírásán, a használt teszt jellemzésén, a kapott eredmények analízisén és interpretációján kívül ajánlásokat is megfogalmaz az oktatás minőségének javítására.

A korábbi években kipróbált és bevezetett tesztek mintájára azok eredményei alapján módosított tartalmi összetevőkkel zajlott a felmérés. Az érvényes alsó tagozatos oktatási standardoknak és teljesítményi követelményeknek megfelelően az állami oktatási program matematika tárgyának 5 témaköréből származó 30 feladatból álló teszt került megíratásra (ebből 20 nyitott és 10 zárt, feladatválasztós kérdés) az alábbi eloszlásban:

Számok, változó és számokkal való műveletek	53,3%
Sorozatok, kifejezések, függvények, táblázatok, grafikonokban	10,0%
Geometria és mérés	20,0%
Kombinatorika, valószínűség, statisztika	10,0%

Logika, indoklás, bizonyítások 6,7%

A kognitív igényesség meghatározásakor a szerzők a kognitív célok revideált Bloom taxonómiából indultak ki. Az ismeretek szintjén a feladatok 3,3%-a tárgyi ismereteket kért, 56,7%-a konceptuális ismereteket, 40%-a procedurális ismereteket és nem tartalmazott metakognitív ismeretet igénylő ismereteket. A kognitív folyamatok szintjén a feladatok közül egy sem irányult alkotásra, 3,3% megjegyzésre, 3,3% a megértésre, 36,7% az alkalmazásra, 46,7% az analízisre és 10% az értékelésre irányult. A matematika tesztben összesen 45 286 diák alsó tagozatos matematikai tudását igyekeztek felmérni, ebből 43 737 diáknál papír alapú, 1 549 pedig elektronikus tesztet töltött ki. A diákok átlagos eredményessége 62,3% volt, a lányok esetében ez 61,6%, míg a fiúknál 62,9% volt. A papír alapú tesztkitöltő diákok eredményessége 61,9% volt, az elektronikusan tesztelőké 71,8%. Az állami iskolák diákjai (a populáció 92,1%-át kitevő) átlagos eredményessége 61,7% volt, az egyházi fenntartású iskoláké 68,4%, míg a magániskolák (a populáció 1,8%-a) 69,8%. Az egészségileg hátrányos helyzetű diákok (összesen 3 091) átlagos matematikai eredményessége 50,8%, míg a szociálisan hátrányos helyzetű diákok (a populáció 3,3%-a) szignifikánsan alacsonyabb 24%-os eredményességet értek el, mint korosztályuk nem hátrányos helyzetű tagjai (63,6%).

A magyar tanítási nyelvű iskolákban a tanulók magyar fordítású tesztet tölthettek ki. A szlovák tanítási nyelvű iskolákban a diákok átlagos eredményessége 63,2%-os, a magyar tanítási nyelvű iskolákban 48,8%-os volt.

A valós életből származó kontextusú feladatok (17) esetében ez 56,2% volt míg az iskolai matematikai kontextusú kérdések (13) esetében 69,5%. A városi iskolákban az eredményesség 65,9% volt, míg a vidéki iskolákban 56,0%, s a város iskolák diákjai közül is jellemzően a nagyobb városok diákjai teljesítettek általában jobban.

Témakörönkénti bontásban legeredményesebbnek a számok, változó és számokkal való műveletek témakört találták (66,4%) míg a legkevésbé sikeresnek a kombinatorika, valószínűség, statisztika témakör bizonyult (49,1%).

A jelentés az egyes teszt-feladtok elemzésével is foglalkozik.

A megfogalmazott ajánlásokban újfent kiemelik az értő olvasás hiányából adódó, a valós életből származó feladatok, a szöveges feladatok, valamint a diákok logikus gondolkodását fejlesztő feladatok problémakörét. Kiemelik, hogy az alsó tagozatos diákok sokszor mechanikusan számolnak, anélkül, hogy értenék, hogy mit is számolnak.

2017-ben is egész országos tesztelés készült november 22-én, 1481 iskola 45 080 diákja vett részt a felmérésben. A tesztelés elektronikus környezetben is zajlott. Közzétételre került többek a teszt, a megoldókulcs, egy sajtóközlemény és és egy részletesebb adatokat tartalmazó prezentáció is tesztelésről (Alföldyová, Števčinová, & Timárová, 2018).

A prezentáció a folyamat leírása mellett főként a mért eredmények különböző szempontból való bemutatására törekszik.

A korábbi években kipróbált és bevezetett tesztek mintájára zajlott a felmérés. Az érvényes alsó tagozatos oktatási standardoknak és teljesítményi követelményeknek megfelelően az állami oktatási program matematika tárgyának 5 témaköréből származó 30 feladatból álló teszt került megíratásra (ebből 20 nyitott és 10 zárt, feladatválasztós kérdés) azonos eloszlásban mit a megelőző évben.

A matematika tesztben összesen 45 062 diák alsó tagozatos matematikai tudását igyekeztek felmérni. A diákok átlagos eredményessége 64,7% volt, a lányok esetében ez 64,3%, míg a fiúknál 65,2% volt, amit nem tartanak szignifikáns különbségnek. Az állami iskolák diákjai (a populáció 91,9%-át kitevő) átlagos eredményessége 64,1% volt, az egyházi fenntartású iskolákban (a populáció 6,2%-a) 70,9%, míg a magániskolák (a populáció 1,9%-a) 73,5%. A teljes szervezettségű iskolákban 65,5%-os eredményességet, míg a kis, csak alsó tagozattal rendelkező iskolákban az átlagos matematikai eredményesség 56,2%. A szociálisan hátrányos helyzetű diákok (a populáció 3,9%-a) szignifikánsan alacsonyabb 27%-os eredményességet értek el, mint korosztályuk nem hátrányos helyzetű tagjai (66,3%).

A magyar tanítási nyelvű iskolákban a tanulók magyar fordítású tesztet tölthettek ki. A szlovák tanítási nyelvű iskolákban a diákok átlagos eredményessége 66,5%-os, a magyar tanítási nyelvű iskolákban 53,2%-os volt.

A valós életből származó kontextusú feladatok esetében az eredményesség 62,1% volt míg az iskolai matematikai kontextusú kérdések esetében 68,1%.

A városi iskolákban az eredményesség 65,9% volt, míg a vidéki iskolákban 56,0%, s a városi iskolák diákjai közül is jellemzően a nagyobb városok diákjai teljesítettek általában jobban.

Témakörönkénti bontásban legeredményesebbnek a számok, változó és számokkal való műveletek témakört találták (70,3%) míg a legkevésbé sikeresnek a kombinatorika, valószínűség, statisztika témakör bizonyult (52%).

2.1.2. Az alapiskolák felső tagozatának matematikai ismereteinek tesztelése

A „Testovanie 9"-nek nevezett felmérés az alapiskolák (az általános iskolák) 5.-től 9. évfolyamának, az ún. felső tagozatnak az átfogó tesztekkel történő objektív felmérésére hivatott, amit a diákok az 9. osztályban év vége előtt írnak meg. Az első öt évben (2003 és 2007 között) pilot üzemben „Monitor 9" néven működött, ami arra volt hivatott, hogy statisztikailag korrekt, szakmailag, tartalmilag is megfelelő mérőeszközöket, teszteket állítsanak össze. A 2003-as és 2004-es évi tesztelésről és eredményeiről nem sokat tudunk, csupán a részvevők számát (16 701 illetve 16 031) és az átlagos eredményességet ismerjük, hogy az 53,8% illetve 43,9% volt matematikából.

2005-től azonban a tesztelés a pilot fázisban is a teljes populációt lefedővé vált, a kapott nagyszámú tesztlap feldolgozása elektronikus segítséggel (szkennelés, írásfelismerő szoftver) zajlott. A teszteket az érvényes felső tagozatos oktatási standardoknak és teljesítményi követelményeknek megfelelően állították össze az Állami Pedagógiai Intézetben. A tesztek kitöltésére 90 perc állt a diákok rendelkezésére. Az alábbiakban közöljük az egyes felmérések eredményeit, úgy ahogy azt a lebonyolító intézet jelentései tartalmazzák. Tekintettel a jelentések terjedelmére igyekeztünk abból csak a lényegi dolgokat és adatokat kiemelni. Saját meglátásainkra, elemzéseinkre és véleményünkre majd azt ezt követő fejezetben térünk rá.

A Monitor 9 első megírása 2005 február 2-án zajlott le. Lehetőség volt a teszt pótterminusban való kitöltésére is, ami 2005 február 11. történt meg. A matematika teszt 30 feladatból állt, ebből 10 nyílt, rövid számszerű adat megadásával, 20 pedig zárt, feleletválasztós kérést tartalmazott. A teszt kitöltésere 90 perc állt a diákok rendelkezésére. Hat feladat 2 pontos, a többi pedig 1 pontos volt, így összesen 36 pont volt megszerezhető. A tesztnek volt egy A és B változata is ami megíratásra került. Elérhető az egyik teszt (A változat), annak megoldókulcsa és a felmérésről készült részletes jelentés (Kuzma, 2005), ami javaslatokat ajánlásokat is tartalmaz a következő évi felméréshez.

A felmérésben 1558 iskola 65 494 tanulója vett részt, ebből 3791 magyar nyelven.

Önkéntes alapon speciális oktatási nevelési igényű tanulók is részt vehette, ezeket külön dolgozták fel.

A magyar tannyelvű iskolákban a tanulók magyarra fordított teszteket tölthettek ki.

Matematikából a tesztelés átlagos eredményessége 65% volt, ami átlagosan 23,45 pontot jelentett a 36 megszerezhetőből. A szlovák tannyelvű iskolákban az átlagosan elért pontszám 23,51 pont volt (65,3%), míg a magyar tannyelvű iskolákban 22,41 (62,25%).

Az állami fenntartású iskolákban az átlagosan elért pontszám 23,4 pont volt, az egyházi fenntartású iskolákban 24,0 és a magániskolákban 21,7 pont.

A Monitor 9 következő megírása 2006 február 7-én zajlott le. Lehetőség volt a teszt pótterminusban való kitöltésére is, ami 2006 március 14-én illetve április 11-én történt meg. A matematika teszt 30 feladatból állt, ebből 10 nyílt, rövid számszerű adat megadású, 20 pedig zárt, feleletválasztós kérést tartalmazott. A teszt két változatának kitöltésere 90 perc állt a diákok rendelkezésére. Mindegyik feladat 1 pontos volt, így összesen 30 pont volt megszerezhető. Elérhető az egyik teszt változat, annak megoldókulcsa és a felmérésről készült részletes jelentés (Kuzma, 2006), ami javaslatokat, ajánlásokat is tartalmaz a következő évi felméréshez.

A felmérés matematika tesztjeiben 1470 iskola 63 801 tanulója vett részt, ebből 3 859 magyar nyelven. A magyar tannyelvű iskolákban a tanulók magyarra fordított teszteket tölthettek ki.

Matematikából a tesztelés átlagos eredményessége 61,4% volt. A szlovák tannyelvű iskolákban az átlagosan eredményesség 61,5% volt, míg a magyar tannyelvű iskolákban 59,87%.

A speciális oktatási-nevelési igényű tanulók is részt vettek a felmérésben, az ő számukra hosszabb idő állt rendelkezésre a teszt kitöltésére, és külön lettek kiértékelve.

Az állami fenntartású iskolákban az átlagos eredményesség 61,4% volt, az egyházi fenntartású iskolákban 64,2% és a magániskolákban 64,1%. A speciális oktatási-nevelési igényű tanulók első fokozatánál az átlagos eredményesség 47,3% volt, a 2. fokozatnál 46,1%.

A Monitor 9 következő megírása 2007 március 13-án zajlott le. Lehetőség volt a teszt pótterminusban való kitöltésére is a megyeszékhelyeken, ami 2007 április 17-én történt meg. A matematika teszt 30 feladatból állt, ebből 10 nyílt, rövid számszerű adat megadású, 20 pedig zárt, feleletválasztós kérést tartalmazott. A teszt két változatának kitöltésere 90 perc állt a diákok rendelkezésére. Mindegyik feladat 1 pontos volt, így összesen 30 pont volt megszerezhető. Elérhető az egyik teszt változat, annak megoldókulcsa, a statisztikai adatok és a felmérésről készült részletes jelentés (Hauser, 2007), ami a pilot fázis alapján javaslatokat, ajánlásokat is tartalmaz a Testovanie 9 felméréseihez.

A felmérés matematika tesztjeiben 59 905 tanuló vett részt. A magyar tannyelvű iskolákban a tanulók magyarra fordított teszteket tölthettek ki, de nem tartalmazza jelentés, hogy mennyien írták a tesztet magyarul, és azt sem, hogy milyen volt az ő eredményességük.

Matematikából a tesztelés átlagos eredményessége 61,2% volt. A fiúk esetében ez 60,1%-os, a lányokéban 62,4%-os volt. A speciális oktatási-nevelési igényű tanulók is részt vettek a felmérésben, az ő számukra hosszabb idő állt rendelkezésre a teszt kitöltésére, és külön lettek kiértékelve. A speciális oktatási-nevelési igényű tanulók első fokozatánál az átlagos eredményesség 47,6% volt, a 2. fokozatnál 45%.

A teszt 35%-ban aritmetikai, 25%-ban algebrai, 30%-ban geometriai és 10%-ban kombinatorikai, valószínűségszámítási és statisztikai feladatokat tartalmazott. Ezen egyes területeknél értékeli azokat és rámutat a jelentés, hogy mik a jellemző problémák, hiányosságok.

Javaslatként megfogalmazza, hogy mely témakörökkel kellene többet foglalkozni (arányszámítás, százalékszámítás, kombinatorika, valószínűségszámítás és statisztika), hogy több időt kellene szentelni olyan feladatok megoldásának, amelyek a tanulók magasabb szintű megismerési képességeit fejlesztik.

A jelentés rámutat, hogy a tesztfeladatok eredményességét jelentősen nem befolyásolta a régió, az iskola székhelye, nagysága, fenntartója, a tanulók neme, de a tesztkérdések típusa sem.

2008-tól a felmérés már Testovanie 9 néven futott, 2008 februárjában zajlott. Ebben az évben a tanulók két matematikai tesztet írtak egy certifikációsat és egy kompetenciamérőt. A teszt első része (a certifikációs teszt) 20 feladatból állt, amiből a fele nyílt feladat volt a másik fele pedig zárt, feleletválasztós. Mindegyik feladat helyes megoldása 1 ponttal volt értékelve, a megoldásra 45 perc állt a tanulók rendelkezésére. A teszt második fele (a kompetenciamérő) 15 feladatot tartalmazott abból három volt csak zárt, feleletválasztós. Az egyes válaszok 1-3 ponttal voltak értékelve (a részmegoldások is értékelve voltak), a megoldásra 30 perc állt a tanulók rendelkezésére.

A matematikai tesztelés első részében 58 009 tanuló vett részt, ebből 3 397-en magyar tannyelvű iskolákból. A teszt a tanulók matematikai ismereteit és készségeit volt hivatott felmérni. A tesztek átlagos eredményessége 56,31% volt. Elérhető az egyik tesztvariáns, a megoldókulcs, és az eredményeket tartalmazó jelentés (Hauser, 2008).

A jelentés megállapítja, hogy az előző évekkel összehasonlítva csökkent a tanulók átlagos eredményessége.

A teszt 30%-ban aritmetikai, 25%-ban algebrai, 35%-ban geometriai és 10%-ban kombinatorikai, valószínűségszámítási és statisztikai feladatokat tartalmazott. Először a felmérések során szerepelt geometriai szerkesztési feladat és a tanulók használhattak számológépet a feladatok megoldása során. A legnehezebbnek két geometriai jellegű feladat a 8. és a 11. bizonyult (28,46%-os eredményesség).

Az aritmetikai ismeretek és készségek szintjén megállapították annak csökkenő tendenciáját (49,28%-os eredményesség), az algebrai ismeretek és készségek szintjét (63,75%-os eredményesség) elfogadhatónak tartották, a geometriai feladatok 49,42%-os eredményességét nem tartják kielégítőnek, akárcsak a kombinatorikai, valószínűségszámítási és statisztikai feladatok 46,1%-os átlagos eredményességét.

A teszt másik fele a tanulók matematikai műveltségét, kompetenciáit szándékozott mérni, ami értelmezésük szerint a tanuló azon képességét mérte, hogy hogyan tudta az ismereteit alkalmazni valós élethelyzetekben, közelítve a nemzetközi mérések metodikájához. Elérhető az egyik tesztvariáns, a megoldókulcs, és az eredményeket tartalmazó jelentés (Pichaničová, 2008), amiben mind a 15 feladat céljait és eredményeit is részletesen elemzik. A teszt másik felét 2 441 szlovák és 364 magyar tannyelvű iskolában tanuló diák írta meg, egy a populációt lefedő reprezentatív mintában. A teszt második részének átlagos eredményessége 35% volt.

2009-ben is a tanulók két matematikai tesztet írtak egy certifikációsat és egy kompetenciamérőt. A teszt első része (a certifikációs teszt) 20 feladatból állt, amiből a fele nyílt feladat volt a másik fele pedig zárt, feleletválasztós. Mindegyik feladat helyes megoldása 1 ponttal volt értékelve, a megoldásra 45 perc állt a tanulók rendelkezésére. A tesztet 2009 március 30-án írták. A tanulók a megoldáshoz használhattak számológépet. A teszt második fele (a kompetenciamérő) 2009 április 29-én került megíratásra. A megoldásra 45 perc állt a tanulók rendelkezésére.

A matematikai tesztelés első részében 51 235 tanuló vett részt, ebből 3 030-an magyar tannyelvű iskolákból. A teszt a tanulók matematikai ismereteit és készségeit volt hivatott felmérni. A tesztek átlagos eredményessége 53,01% volt. A szlovák tannyelvű iskolákban 53,14%-os, a magyar tannyelvű iskolákban 50,70%-os átlagos eredményességgel. Foglalkoznak a nemenkénti különbségek vizsgálatával mind, a szlovák, mind pedig a magyar tannyelvű iskolákban: a lányok eredményessége jobb volt, de nem mutatható ki jelentős statisztikailag szignifikáns különbség. Elérhető az egyik tesztvariáns, a megoldókulcs, és az eredményeket tartalmazó jelentés ("Správa o priebehu a výsledkoch certifikačného testovania žiakov 9. ročníka základných škôl v školskom roku 2008/2009", 2009), egy statisztikai kimutatás ("Výsledky a základné štatistické údaje z celoslovenského testovania žiakov 9. ročníka ZŠ v školskom roku 2008/2009", 2009), valamint az egyes iskolák eredményessége is. Itt már szerepel a %-os eredményesség fogalma mellett a percentil fogalma is, ami azt fejezi ki, hogy az iskolák közül milyen aránylagos helyen szerepel az adott iskola (pl. a 90 percentil azt fejezi ki, hogy az adott iskola eredménye az összes iskola 90%-ának eredményétől jobb). Az iskolák eredményességét első alkalommal szintén közzétette az intézet.

A teszt 35%-ban aritmetikai, 20%-ban algebrai, 35%-ban geometriai és 10%-ban kombinatorikai, valószínűségszámítási és statisztikai feladatokat tartalmazott.

Az aritmetikai ismeretek és készségek terén az eredményesség 61,99%-os, az algebrai ismeretek és készségeké 47,04%-os, a geometriai feladatok 43,11%-os eredményessége volt a legalacsonyabb, és a kombinatorikai, valószínűségszámítási és statisztikai feladatok 68,22%-os átlagos eredményességet adott.

A teszt másik feléről nem találhatók információk a hivatalos webhelyen.

2010-ben is a tanulók két matematikai tesztet írtak egy certifikációsat és egy kompetenciamérőt. A teszt első része (a certifikációs teszt) 20 feladatból állt, amiből a fele nyílt feladat volt a másik fele pedig zárt, feleletválasztós. A teszt a tanulók matematikai ismereteit és készségeit volt hivatott felmérni. Mindegyik feladat helyes megoldása 1 ponttal volt értékelve, a megoldásra 60 perc állt a tanulók rendelkezésére. A tesztet 2010 március 10-én írták. A tanulók a megoldáshoz használhattak számológépet. A teszt második fele (a kompetenciamérő) 2010 április 28-án került megíratásra az iskolák egy reprezentatív mintáján. A megoldásra 60 perc állt a tanulók rendelkezésére.

A matematikai tesztelés első részében 47 500 tanuló vett részt. A tesztek átlagos eredményessége 60,11% volt. A szlovák tannyelvű iskolákban 60,20%-os, a magyar tannyelvű iskolákban 58,90%-os átlagos eredményességgel. Foglalkoznak a nemenkénti különbségek vizsgálatával is: a lányok eredményessége jobb volt (61,2%), de nem mutatható ki jelentős statisztikailag szignifikáns különbség. Elérhető az egyik tesztvariáns, a megoldókulcs, és az eredményeket tartalmazó jelentés (Polgáryová, 2010a), egy statisztikai kimutatás (Polgáryová, 2010b), valamint az egyes iskolák eredményessége is. Az iskolák eredményességét szintén közzétette az intézet.

A teszt 30%-ban aritmetikai, 30%-ban algebrai, 30%-ban geometriai és 10%-ban kombinatorikai, valószínűségszámítási és statisztikai feladatokat tartalmazott. Első alkalommal foglalkoznak a feladatok kognitív szintjének meghatározásával. E szerint 6 feladat a megjegyzésre és a megértésre, 9 feladat a specifikus transzferre 5 pedig a nemspecifikus transzferre vonatkozó volt.

A teszt másik feléről csak a szervezési információk és a kiválasztott iskolák jegyzéke található meg a hivatalos webhelyen, a tesztek és az eredmények sem.

2011-ben is a tanulók két matematikai tesztet írtak egy certifikációsat és egy kompetenciamérőt. A teszt első része (a certifikációs teszt) 20 feladatból állt, amiből a fele nyílt feladat volt a másik fele pedig zárt, feleletválasztós. A teszt a tanulók matematikai ismereteit és készségeit volt hivatott felmérni. Mindegyik feladat helyes megoldása 1 ponttal volt értékelve, a megoldásra 60 perc állt a tanulók rendelkezésére. A tesztet 2011 március 9-én írták. A teszt második fele (a kompetenciamérő) az olvasási és matematikai kompetenciákat volt hivatott felmérni és az iskolák egy reprezentatív mintáján került megíratásra. A hivatalos webhelyen csak az egyes iskolák ebben való eredményességéről találhatók információk.

A matematikai tesztelés első részében 45 381 tanuló vett részt. A tesztek átlagos eredményessége 52,9% volt. A teszt 3 feladatát (a 6., 7. és a 14.), amelyeknél magas volt a meg nem oldás aránya, és/vagy nagyon alacsony az eredményesség, nem optimális pszichometrikus jellemzőik miatt az értékelés során kihagyták, mert nehézségük miatt nem megbízhatóan mérték a diákok tudását. Elérhető az egyik tesztvariáns, a megoldókulcs, az eredményeket tartalmazó jelentés (Polgáryová, Polgáryová, Kurajová Stopková, & Kubiš, 2011), valamint a tesztelések eredményei különböző szempontok szerint kimutatva. Ezek alapján vizsgálva, kimutatva volt az eredményesség megyék, járások és iskolák szerint, az iskolák fenntartója, aszerint, hogy városi vagy vidéki iskolákról van szó, illetve, hogy milyen a tanuló érdemjegye és mért ismeretei között a korreláció, ... Foglalkoztak a nemenkénti különbségek vizsgálatával is: a fiúk eredményessége jobb volt (53,4%), de nem mutatható ki jelentős statisztikailag szignifikáns különbség. A tannyelv szerinti különbségek azonban nem találhatóak meg az előző évektől eltérően.

A teszt 30%-ban aritmetikai, 30%-ban algebrai, 30%-ban geometriai és 10%-ban kombinatorikai, valószínűségszámítási és statisztikai feladatokat tartalmazott. A három, értékelésből kizárt feladat közül 2 azonban geometriai, egy pedig algebrai témájú volt.

Foglalkoztak a feladatok kognitív szintjének meghatározásával. E szerint 5 feladat a megjegyzésre és a megértésre, 10 feladat a specifikus transzferre 5 pedig a nemspecifikus transzferre vonatkozó volt. Ezen bontás szerint közzétették ezen szintek szerinti eredményességet is: 54,4%, 52,1% illetve 52,9%.

2012-ben március 14-én írták a tanulók matematikából a tesztet. A teszt 20 feladatból állt, amiből a fele nyílt feladat volt a másik fele pedig zárt, feleletválasztós. A teszt a tanulók matematikai ismereteit és készségeit volt hivatott felmérni. Mindegyik feladat helyes megoldása 1 ponttal volt értékelve, a megoldásra 70 perc állt a tanulók rendelkezésére. Ez évtől a tesztelésen külső megfigyelők is voltak (minden helyszínen), ami annak objektivitására jelentős hatással volt.

A matematikai tesztelésben 43 485 tanuló vett részt. A tesztek átlagos eredményessége 57,5% volt. A magyar tannyelvű iskolákban a teszt magyarra fordított változatával dolgozhattak a tanulók. A szlovák tannyelvű iskolákban az átlagos eredményesség 57,7%-os, a magyar tannyelvű iskolákban 54,9%-os. A közzétett jelentés szerint nem tekintik statisztikailag szignifikáns különbségnek. Foglalkoztak a nemenkénti különbségek vizsgálatával is: a lányok eredményessége jobb volt (57,8%), de nem mutatható ki szignifikáns különbség. Elérhető az egyik tesztvariáns, a megoldókulcs, az eredményeket tartalmazó jelentés (Alföldyová & Polgáryová, 2012), valamint a tesztelések eredményei ("Výsledky celoslovenského testovania Testovanie 9-2012 žiakov 9. ročníka ZŠ v školskom roku 2011/2012", 2012). Ez utóbbi kettő vizsgálja, kimutatja az eredményességet megyék, járások és iskolák szerint, az iskolák fenntartója, aszerint, hogy városi vagy vidéki iskolákról van szó, illetve, hogy milyen a tanuló érdemjegye valamint a mért ismeretei között a korreláció, ...

A teszt 30%-ban aritmetikai, 25%-ban algebrai, 30%-ban geometriai és 15%-ban kombinatorikai, valószínűségszámítási és statisztikai feladatokat tartalmazott. Az elért eredményesség ezen területeken: 66,4%, 62,8%, 48,2% illetve 49,7%. A tesztfeladatok közül 11 a valós életből vett kontextusban volt megfogalmazva (56%-os eredményesség), 9 pedig az iskolai matematikai tananyag kontextusában (59,4%-os eredményesség).

Foglalkoztak a feladatok kognitív szintjének meghatározásával. E szerint 3 feladat a megjegyzésre és a megértésre, 14 feladat a specifikus transzferre 3 pedig a nemspecifikus transzferre vonatkozó volt. Ezen bontás szerint közzétették ezen szintek szerinti eredményességet is: 73,2%, 59,7% illetve 31,8%.

A jelentés kiemeli, hogy az eredmények módszertani analízise alátámasztja, hogy a tanulók az alapiskolából való kilépésekor a geometriai, valamint a kombinatorikai, valószínűségszámítási és statisztikai tananyagokból nem rendelkeznek az alaptananyag elsajátításának olyan mélységével, mértékével, hogy azokat effektíven tudják használni magasabb kognitív igényességű feladatok megoldásakor. A leggyengébb eredményeket a tanulók geometriából és kombinatorikából érték el: jellemzően nem kellően fejlett a térszemléletük, képtelenek geometriai alakzatokat egyszerűbbekre bontani és hiányzik a feladatmegoldás tervezésének a képessége.

2013-ban március 13-án írták a tanulók matematikából a tesztet. A teszt 20 feladatból állt, amiből a fele nyílt feladat volt a másik fele pedig zárt, feleletválasztós. A teszt a tanulók matematikai ismereteit és készségeit volt hivatott felmérni. Mindegyik feladat helyes megoldása 1 ponttal volt értékelve, a megoldásra 70 perc állt a tanulók rendelkezésére.

A matematikai tesztelésben 41 774 tanuló vett részt. A tesztek átlagos eredményessége 60,1% volt. A magyar tannyelvű iskolákban a teszt magyarra fordított változatával dolgozhattak a tanulók. A szlovák tannyelvű iskolákban az átlagos eredményesség 60,4%-os, a magyar tannyelvű iskolákban (a populáció 6,9%-a) 55,9%-os. A közzétett jelentés szerint nem tekintik statisztikailag szignifikáns különbségnek. Foglalkoztak a nemenkénti különbségek vizsgálatával is: a lányok eredményessége jobb volt (61%), de nem mutatható ki szignifikáns különbség. Elérhető az egyik tesztvariáns, a megoldókulcs, az eredményeket tartalmazó jelentés (Polgáryová & Košinárová, 2013), valamint a tesztelések eredményei (“Výsledky celoslovenského testovania žiakov 9. ročníka ZŠ 2012/2013”, 2013). Ez utóbbi kettő vizsgálja, kimutatja az eredményességet megyék, járások és iskolák szerint, az iskolák fenntartója, aszerint, hogy városi vagy vidéki iskolákról van szó, illetve, hogy milyen a tanuló érdemjegye valamint a mért ismeretei között a korreláció, ...

A teszt 25%-ban aritmetikai, 25%-ban algebrai, 30%-ban geometriai és 20%-ban kombinatorikai, valószínűségszámítási és statisztikai feladatokat tartalmazott. Az elért eredményesség ezen területeken: 59,2%, 65,7%, 51,2% illetve 67,4%.

A tesztfeladatok fele a valós életből vett kontextusban volt megfogalmazva (63,4%-os eredményesség), fele pedig az iskolai matematikai tananyag kontextusában (56,7%-os eredményesség).

Foglalkoztak a feladatok kognitív szintjének meghatározásával. E szerint 3 feladat a megjegyzésre és a megértésre, 14 feladat a specifikus transzferre 3 pedig a nemspecifikus transzferre vonatkozó volt. Ezen bontás szerint közzétették ezen szintek szerinti eredményességet is: 75,8%, 60,3% illetve 43,1%.

A jelentés kiemeli, az eredmények módszertani analízise alátámasztja, hogy bár egyes területeken a diákok az elvártaknak megfelelően teljesítettek, de továbbra is problémát jelent a geometriai ábrák értelmezése, a kölcsönös kapcsolatok meghatározása és a szöveges feladatok matematikai átírása.

2014-ben március 12-én írták a tanulók matematikából a tesztet. A teszt 20 feladatból állt, amiből a fele nyílt feladat volt a másik fele pedig zárt, feleletválasztós. A teszt a tanulók matematikai ismereteit és készségeit volt hivatott felmérni. Mindegyik feladat helyes megoldása 1 ponttal volt értékelve, a megoldásra 60 perc állt a tanulók rendelkezésére.

A matematikai tesztelésben 42 007 tanuló vett részt. A tesztek átlagos eredményessége 54,7% volt. A magyar tannyelvű iskolákban a teszt magyarra fordított változatával dolgozhattak a tanulók. A magyar tannyelvű iskolákban (a populáció 6,8%-a) 55,0%-os. A közzétett jelentés szerint nem tekintik statisztikailag szignifikáns különbségnek. Foglalkoztak a nemenkénti különbségek vizsgálatával is: a lányok eredményessége jobb volt (54,9%), de nem mutatható ki szignifikáns különbség. Elérhető az egyik tesztvariáns, a megoldókulcs, az eredményeket tartalmazó jelentés (Polgáryová, Košinárová, & Mizerová, 2014), valamint a tesztelések eredményei (“Testovanie 9-2014, Výsledky celoslovenského testovania žiakov 9. ročníka ZŠ 2013/2014”, 2014). Ez utóbbi kettő vizsgálja, kimutatja az eredményességet megyék, járások és iskolák, az iskolák nagysága, az iskolák fenntartója szerint, aszerint, hogy városi vagy vidéki iskolákról van szó, illetve, hogy milyen a tanuló érdemjegye és mért ismeretei között a korreláció, ...

A teszt 25%-ban aritmetikai, 25%-ban algebrai, 25%-ban geometriai és 25%-ban kombinatorikai, valószínűségszámítási és statisztikai feladatokat tartalmazott. Az elért eredményesség ezen területeken: 55,6%, 44,5%, 53,5% illetve 65,0%.

A tesztfeladatok fele a valós életből vett kontextusban volt megfogalmazva (58,2%-os eredményesség), fele pedig az iskolai matematikai tananyag kontextusában (51,1%-os eredményesség).

A tesztkészítők a feladatok kognitív igényességének meghatározásakor az oktatási célok revideált Bloom valamint Niemierko taxonómiájából indultak ki. A konceptuális ismeretek esetében 57,9%-os, a procedurális ismeretek terén 52,2%-os eredményesség volt mérve. A megértésre irányuló feladtok eredményessége 59,4%-os, az alkalmazásra irányulóké 55,1%, az elemzésre irányulóak 47,7% és az értékelésre irányulóké 63%-os volt.

A jelentés kiemeli, hogy a tanulók jól képesek a szövegbe illesztett táblázatok, grafikonom információit feldolgozni, de továbbra is problémát jelent a szöveges feladatok matematikai átírása, a feladatmegoldás stratégiájának tervezése és a kapott eredmények értelmezése, amit a 2012-es nemzetközi PISA felmérés is alátámasztott.

Összehasonlítva a 2009-es tesztelés eredményeivel látható, hogy a a kilencedikes tanulók képességei nem változtak jelentősen, de egyes típuső feladatok alacsony eredményessége arról tanúskodik, hogy a bennük lévő lehetőségek nincsenek kiaknázva és ezen tanulók felkészítése a műszaki szakirányokon való továbbtanulásra nem adekvát.

2015-ben április 15-én írták a tanulók matematikából a tesztet. A teszt 20 feladatból állt, amiből a fele nyílt feladat volt a másik fele pedig zárt, feleletválasztós. A teszt a tanulók matematikai ismereteit és készségeit volt hivatott felmérni. Mindegyik feladat helyes megoldása 1 ponttal volt értékelve, a megoldásra 60 perc állt a tanulók rendelkezésére.

A matematikai tesztelésben 40 880 tanuló vett részt. A tesztek átlagos eredményessége 52,7% volt. Első alkalommal lehetséges volt a tesztet elektronikus formában is kitölteni, ezt 1 686 tanuló választotta, és 63,6%-os eredményességet értek el. A magyar tannyelvű iskolákban a teszt magyarra fordított változatával dolgozhattak a tanulók. A magyar tannyelvű iskolákban (a populáció 6,5%-a) elért eredményesség 46,6%-os volt. A közzétett jelentés szerint nem tekintik statisztikailag szignifikáns különbségnek. Foglalkoztak a nemenkénti különbségek vizsgálatával is: a fiúk 53,4%-os és a lányok 51,4%-os eredményessége között nem mutatható ki szignifikáns különbség.

Az intézet webhelyén elérhető az egyik tesztvariáns, a megoldókulcs, az eredményeket tartalmazó jelentés (Polgáryová, Košinárová, Mizerová, & Bolemant, 2015), valamint a tesztelések eredményei ("Testovanie 9-2015, Výsledky celoslovenského testovania žiakov 9. ročníka ZŠ 2014/2015", 2015). Ez utóbbi kettő vizsgálja, kimutatja az eredményességet megyék, járások és iskolák, az iskolák nagysága, az iskolák fenntartója szerint, aszerint, hogy városi vagy vidéki iskolákról van szó, illetve, hogy milyen a tanuló érdemjegye valamint a mért ismeretei között a korreláció, ...

A teszt 30%-ban aritmetikai, 25%-ban algebrai, 25%-ban geometriai és 20%-ban kombinatorikai, valószínűségszámítási és statisztikai feladatokat tartalmazott. Az elért eredményesség ezen területeken: 55,4%, 57,4%, 37,6% illetve 50,1%. A tesztfeladatok fele a valós életből vett kontextusban volt megfogalmazva (55,1%-os eredményesség), fele pedig az iskolai matematikai tananyag kontextusában (49,3%-os eredményesség).

A tesztkészítők a feladatok kognitív igényességének meghatározásakor az oktatási célok revidiált Bloom taxonómiából indultak ki. A konceptuális ismeretek esetében 58,9%-os, a procedurális ismeretek terén 45,6%-os eredményesség volt mérve. A megértésre irányuló feladtok eredményessége 67%-os, az alkalmazásra irányulóké 62,5%, az elemzésre irányulóak 53,4% és az értékelésre irányulóké 72,5%-os volt.

A jelentés javaslatokat, ajánlásokat is megfogalmaz a matematika tanításának színvonalának emelésére. Továbbra is problémát jelent a tanulók nem kellően fejlett térszemlélete, a terminológiai hiányosságok és a kifejezéssekkel végzett formális műveletek. Ismételten megállapítják, hogy az alsóbb osztályokban elhanyagolt a geometria oktatása, főleg a szemléletesség és a modellezés. A tanulók a testek közül csak a kockát és a téglatestet ismerik, s ott is keverik a térfogat és a felszín fogalmát. Az egyik legnagyobb gondként az jelent meg, hogy a tanulók nem képesek alkalmazni és kombinálni azon ismereteiket és képességeiket, amelyek egyidejűleg több témakör tananyagára építenek. Ajánlásként azt fogalmazták meg, hogy az adott témaköröket ne izolált részenként oktassák a tanárok és többet koncentráljanak a magasabb kognitív szintű (analízis, értékelés, kreatív) feladatmegoldásra.

2016-ben április 6-án írták a tanulók matematikából a tesztet. A teszt 20 feladatból állt, amiből a fele nyílt feladat volt a másik fele pedig zárt, feleletválasztós. A teszt a tanulók matematikai ismereteit és készségeit volt hivatott felmérni. Mindegyik feladat helyes megoldása 1 ponttal volt értékelve, a megoldásra 60 perc állt a tanulók rendelkezésére.

A matematikai tesztelésben 38 230 tanuló vett részt. A tesztek átlagos eredményessége 52,8% volt. Lehetséges volt a tesztet elektronikus formában is kitölteni, ezt 1 159 tanuló választotta, és 64,3%-os eredményességet értek el. A magyar tannyelvű iskolákban a teszt magyarra fordított változatával dolgozhattak a tanulók. A magyar tannyelvű iskolákban (a populáció 6,5%-a) elért eredményesség 45,5%-os volt. A közzétett jelentés szerint nem tekintik statisztikailag szignifikáns különbségnek. Foglalkoztak a nemenkénti különbségek vizsgálatával is: a fiúk 52,7%-os és a lányok 53%-os eredményessége között nem mutatható ki szignifikáns különbség. Az intézet webhelyén elérhető az egyik tesztvariáns, a megoldókulcs, az eredményeket tartalmazó jelentés (Polgáryová & Košinárová, 2016), valamint a tesztelések eredményei ("Testovanie 9-2016, Výsledky celoslovenského testovania žiakov 9. ročníka ZŠ 2015/2016", 2016). Ez utóbbi kettő vizsgálja, kimutatja az eredményességet megyék, járások és iskolák, az iskolák nagysága, az iskolák fenntartója szerint, aszerint, hogy városi vagy vidéki iskolákról van szó, illetve, hogy milyen a tanuló érdemjegye és a mért ismeretei között a korreláció, ...

A teszt 25%-ban aritmetikai, 25%-ban algebrai, 25%-ban geometriai és 25%-ban kombinatorikai, valószínűségszámítási és statisztikai feladatokat tartalmazott. Az elért eredményesség ezen területeken: 56,7%, 59,1%, 42,5% illetve 53,1%. A tesztfeladatok fele a valós életből vett kontextusban volt megfogalmazva (59,3%-os eredményesség), fele pedig az iskolai matematikai tananyag kontextusában (46,4%-os eredményesség).

A tesztkészítők a feladatok kognitív igényességének meghatározásakor az oktatási célok revidiált Bloom taxonómiából indultak ki. A konceptuális ismeretek esetében 49,7%-os, a procedurális ismeretek terén 54,5%-os eredményesség volt mérve. A megértésre irányuló feladtok eredményessége 66,6%-os, az alkalmazásra irányulóké 55,8%, az elemzésre irányulóak 45,3% és az értékelésre irányulóké 45,7%-os volt.

A jelentés javaslatokat, ajánlásokat is megfogalmaz a matematika tanításának színvonalának emelésére. Évek óta megállapítják, hogy nem elégségesek a tanulók geometriai ismeretei és képességei, de továbbra is problémát jelent a különböző mennyiségek közötti kapcsolatok felfedezése, a kapott eredmények értelmezése. Megoldást az innovatív módszerek és formák bevezetésében, a mindennapi életből vett feladatok besorolásában és a feladatok alkotó jellegű megoldáskeresésében látták.

2017-ben április 5-én írták a tanulók matematikából a tesztet. A teszt 20 feladatból állt, amiből a fele nyílt feladat volt a másik fele pedig zárt, feleletválasztós. A teszt a tanulók matematikai ismereteit és készségeit volt hivatott felmérni. Mindegyik feladat helyes megoldása 1 ponttal volt értékelve, a megoldásra 60 perc állt a tanulók rendelkezésére.

A matematikai tesztelésben 36 454 tanuló vett részt. A tesztek átlagos eredményessége 56,4% volt. Lehetséges volt a tesztet elektronikus formában is kitölteni, ezt 955 tanuló választotta, és 69,5%-os eredményességet értek el. A magyar tannyelvű iskolákban a teszt magyarra fordított változatával dolgozhattak a tanulók. A magyar tannyelvű iskolákban (a populáció 6,8%-a) elért eredményesség 48,8%-os volt. A közzétett jelentés szerint nem tekintik statisztikailag szignifikáns különbségnek. Foglalkoztak a nemenkénti különbségek vizsgálatával is: a fiúk 55,8%-os és a lányok 56,9%-os eredményessége között nem mutatható ki szignifikáns különbség. Az intézet webhelyén elérhető az egyik tesztvariáns, a megoldókulcs, az eredményeket tartalmazó jelentés (Polgáryová, Košinárová, Bolemant, & Khernová, 2017), valamint a tesztelések eredményei ("Testovanie 9-2016, Výsledky celoslovenského testovania žiakov 9. ročníka ZŠ 2016/2017", 2017). Ez utóbbi kettő vizsgálja, kimutatja az eredményességet megyék, járások és iskolák, az iskolák nagysága, az iskolák fenntartója szerint, aszerint, hogy városi vagy vidéki iskolákról van szó, illetve, hogy milyen a tanuló érdemjegye és mért ismeretei között a korreláció, ...

A teszt 30%-ban aritmetikai, 20%-ban algebrai, 25%-ban geometriai és 25%-ban kombinatorikai, valószínűségszámítási és statisztikai, valamint logikai feladatokat tartalmazott. Az elért eredményesség ezen területeken: 57,2%, 42,5%, 51% illetve 71,9%.

A tesztfeladatok fele a valós életből vett kontextusban volt megfogalmazva (a fiúknál 59,8%-os, a lányoknál 56,9%-os eredményesség), fele pedig az iskolai matematikai tananyag kontextusában (a fiúknál 54%-os, a lányoknál 54,7%-os eredményesség).

A tesztkészítők a feladatok kognitív igényességének meghatározásakor az oktatási célok revidiált Bloom taxonómiából indultak ki. A konceptuális ismeretek esetében 54%-os, a procedurális ismeretek terén 58,7%-os eredményesség volt mérve. A megértésre irányuló feladtok eredményessége 60,8%-os, az alkalmazásra irányulóké 55,6%, az elemzésre irányulóak 55,8% és az értékelésre irányulóké 49,6%-os volt.

A jelentés javaslatokat, ajánlásokat is megfogalmaz a matematika tanításának színvonalának emelésére. Évek óta megállapítják, hogy nem elégségesek a tanulók geometriai ismeretei és képességei, de továbbra is problémát jelent a különböző mennyiségek közötti kapcsolatok felfedezése, a kapott eredmények értelmezése. Megoldást az innovatív módszerek és formák bevezetésében, a mindennapi életből vett feladatok besorolásában és a feladatok alkotó jellegű megoldáskeresésében látták.

2018-ban március 21-én írták a tanulók matematikából a tesztet. A teszt 20 feladatból állt, amiből a fele nyílt feladat volt a másik fele pedig zárt, feleletválasztós. A teszt a tanulók matematikai ismereteit és készségeit volt hivatott felmérni. Mindegyik feladat helyes megoldása 1 ponttal volt értékelve, a megoldásra 60 perc állt a tanulók rendelkezésére.

A matematikai tesztelésben 36 381 tanuló vett részt. A tesztek átlagos eredményessége 55,9% volt. Lehetséges volt a tesztet elektronikus formában is kitölteni, ezt 870 tanuló választotta, és 69,8%-os eredményességet értek el. A magyar tannyelvű iskolákban a teszt magyarra fordított változatával dolgozhattak a tanulók. A magyar tannyelvű iskolákban (a populáció 6,7%-a) elért eredményesség 44,8%-os volt. A közzétett jelentés szerint nem tekintik statisztikailag szignifikáns különbségnek. Az intézet webhelyén elérhető az egyik tesztvariáns, a megoldókulcs, az eredményeket tartalmazó jelentés (Khernová, Košinárová, & Bolemant, 2018), valamint a tesztelések eredményei ("Testovanie 9-2018-Výsledky celoslovenského testovania žiakov 9. ročníka ZŠ 2017/2018", 2018).

Ez utóbbi kettő vizsgálja, kimutatja az eredményességet megyék, járások és iskolák, az iskolák nagysága, az iskolák fenntartója szerint, aszerint, hogy városi vagy vidéki iskolákról van szó, illetve, hogy milyen a tanuló érdemjegye és mért ismeretei között a korreláció, ...

A teszt 20%-ban aritmetikai, 25%-ban algebrai, 25%-ban geometriai és 30%-ban kombinatorikai, valószínűségszámítási és statisztikai, valamint logikai feladatokat tartalmazott. Az elért eredményesség ezen területeken: 62,6%, 64,9%, 47,9% illetve 50,6%.

A tesztfeladatok fele a valós életből vett kontextusban volt megfogalmazva (a fiúknál 56,2%-os, a lányoknál 54,9%-os eredményesség), fele pedig az iskolai matematikai tananyag kontextusában (a fiúknál 55,3%-os, a lányoknál 57,2%-os eredményesség).

A tesztkészítők a feladatok kognitív igényességének meghatározásakor az oktatási célok revidiált Bloom taxonómiából indultak ki. A konceptuális ismeretek esetében 54%-os, a procedurális ismeretek terén 58,7%-os eredményesség volt mérve. A megértésre irányuló feladtok eredményessége 78,4%-os, az alkalmazásra irányulóké 58,4%, az elemzésre irányulóak 56,5% és az értékelésre irányulóké 47%-os volt.

2.1.3. A középiskolák matematikai ismereteinek tesztelései

A középiskolai ismeretek tesztelése alatt az érettségi vizsgát (maturita) értjük. A matematika esetén az a lényegi különbség az alapiskolákon végzett felmérésekkel ellentétben, hogy azok a teljes populációt lefedő felmérések (a pilot fázis befejeztét követően), míg a matematika nem kötelező érettségi tantárgy, így a központilag meghatározott matematika írásbelin, az érettségi ún. külső részén (externá časť maturinej skúšky) csak azok vettek részt, akik a matematikát érettségi tantárgynak választották.

A matematikából érettségizők a központi írásbelit követően az érettségi ún. belső részén (interná časť maturinej skúšky), szóbeli vizsgán vesznek részt az érettségi szak-vizsgabizottság előtt, és ezen két rész közös értékelése alapján kap a diák érettségi érdemjegyet.

A legutóbbi (2018) év adatai alapján az érettségiző diákok 12,8%-a érettségizik csupán.

Szlovákiai történetének első középiskolai matematikai felmérései 2000 és 2004 közé datálhatóak, amikor Monitor néven a középiskolák diákjaival megíratott tesztek azt a célt szolgálták, hogy az érettségi vizsga írásbeli részének verifikált, jól mérő tesztjeit tudják a nagymérvű minta alapján összeállítani. Ezen pilot időszak alatt a megírt tesztek eredményeit az érettségibe nem számították be, vagy nem kellett beszámítani. A 2005-ös évtől Maturita (érettségi) néven fut és a matematikából érettségizők objektív populáción belüli összehasonlítására szolgál. 2008-ig két szintű (alap- és emelt-) volt, 2009-től azonban egységesen szintek nélküli a felmérés.

2008-ig az Állami Pedagógiai Intézet volt a felmérések és az érettségi szervezője, fo lebonyolítója és kiértékelője. 2009-től ezt a szerepet átvette az erre a célra létrehozott Oktatás Certifikált Méréseinek Nemzeti Intézete (NÚCEM). A NÚCEM átvette és közzétette a korábbi felmérések és érettségikre vonatkozó adatokat. Az egyes években a felmérések / érettségi vizsga formátuma, a közzétett jelentések, kiértékelések és adatok struktúrája eltérő volt, ezért az alábbiakban az egyes évek kivonatos kiértékelése sem egységes struktúrájú. Igyekeztünk azonban a főbb mutatókat összegyűjteni és a változásokat is bemutatni.

A tesztelések, és írásbeli érettségik során a teszteknek általában 2, hasonló variánsa került megírattatásra.

A magyar tannyelvű iskolákban lehetséges volt magyar nyelvű tesztet írni, azonban azok nem mind érhetőek el. A magyar tannyelvű iskolák eredményességéről sajnos az elérhető forrásokban nem esik általában szó.

2000-ben különböző formátumú tesztek voltak megíratva matematikából érettségizni szándékozó és matematikából érettségizni nem szándékozó diákokkal is. Eredmények nincsenek közzétéve.

2001-ben két szintű matematikai tesztet írattak meg, az M-1 szintet gimnáziumok (6 290 fő) és szakközépiskolák diákjai (797 fő), az M-2 szintet szakközépiskolák (2 531 fő) és középfokú szaktanintézetek (1 285 fő) írták meg. Az M-1-es szint két részből állt: egy tesztből, ami 25 feleletválasztós kérdést és 5 rövid tesztkérdést tartalmazott és egy kidolgozós részből, ami az érettségi belső részének központilag megadott kérdései voltak és aminek 4 feladatából 3-at kellet megoldani. Az M-2-es szint egy tesztből állt, ami 25 feleletválasztós kérdést és 5 rövid tesztkérdést tartalmazott. Az M-1 szint átlagos eredményessége 48,5%, az M-2 szinté 39,2% volt, legalacsonyabb az összes tesztelt tantárgy közül. A magyar tannyelvű iskolákban az M-1 szint átlagos eredményessége 49,0%, az M-2 szinté 65,3% volt (bár ez utóbbi adat statisztikailag nem értelmezhető tekintettel, hogy összesen 17 diák vett részt a felmérésben). A fiúk jellemzően jobb eredményt értek el (52,1% illetve 43,9%), mint a lányok (44,2% illetve 33,2%). A NÚCEM webhelyén elérhető a tesztek egyik variánsa, a megoldókulcs és egy rövid jelentés is.

2002-ben az előző évben használt formátumhoz hasonló módon zajlott a tesztelés. az M-1 szintet gimnáziumok diákjai (2 030 fő), az M-2 szintet szakközépiskolák (947 fő) és középfokú szaktanintézetek (981 fő) írták meg. Az M-1-es szint két részből állt: egy tesztből, ami 20 feleletválasztós kérdést és 10 rövid tesztkérdést tartalmazott és egy kidolgozós részből, ami az érettségi belső részének központilag megadott kérdései voltak és aminek 6 feladatából 5-öt kellet megoldani. Az M-2-es szint egy tesztből állt, ami 20 feleletválasztós kérdést és 10 rövid tesztkérdést tartalmazott. Az M-1 szint átlagos eredményessége 44%, az M-2 szinté 37,8% volt, legalacsonyabbak között az összes tesztelt tantárgy közül. A magyar tannyelvű iskolákban az M-1 szint átlagos eredményessége 49,9% volt. A fiúk jellemzően jobb eredményt értek el (47,8% illetve 42,7%), mint a lányok (40,6% illetve 30,6%). A NÚCEM webhelyén elérhető a tesztek mindkét variánsa, a megoldókulcsok és egy rövid jelentés is.

2003-ban az előző évben használt formátumban zajlott a tesztelés. az M-1 szintet gimnáziumok diákjai (1 836 fő), az M-2 szintet szakközépiskolák (2 074 fő) és középfokú szaktanintézetek (955 fő) írták meg. Az M-1 szint átlagos eredményessége 47,6%, az M-2 szinté 35,8% volt. A fiúk jellemzően jobb eredményt értek el (49,2% illetve 40%), mint a lányok (45,3% illetve 30,7%). A NÚCEM webhelyén elérhető a tesztek mindkét variánsa, a megoldókulcsok és egy rövid jelentés is.

2004-ben a szinteknek (emelt- és alap-) más megnevezést adtak (A és B). Az A és a B szint is egy-egy tesztből állt, ami 10 feleletválasztós kérdést és 20 eredménymegadós tesztkérdést tartalmazott. A teszt kidolgozására 120 perc állt a diákok rendelkezésére. Az érettségi belső része egy kidolgozós teszt, aminek 6 feladatából 5-öt kellet megoldani. Kidolgozására 60 perc volt meghatározva. A NÚCEM webhelyén elérhető a külső tesztek mindkét variánsa, a belső teszt, a megoldókulcsok és egy rövid jelentés is, ami azonban a matematika tantárgyra vonatkozó eredményeket nem tartalmazza.

2005-től Maturita (érettségi) néven bevezetett érettségi külső része (emelt- és alap-) szintű központilag mért összehasonlítható adatait adja a korosztálynak. A matematika érettségi immár nem felmérés jellegű, értékelése az érettségi jegyet meghatározó. Az A és a B szint is egy-egy tesztből állt, ami 20 eredménymegadós és 10 feleletválasztós tesztkérdést tartalmazott. A teszt kidolgozására 120 perc állt a diákok rendelkezésére. Az A szintű érettségi vizsgán 2 637-en vettek részt, a B szintűn pedig 8 537 diák.

Az A szintű érettségi 83,6%-os átlagos eredményességgel zárult, ami a gimnazisták (2 530 fő) 84,4% és a többi iskolatípus (107 fő) 66,2% eredményeiből adódott. A B szintű érettségi 72,7%-os átlagos eredményességét a gimnáziumok (6 710 fő) 76,8%-os és a többi iskolatípus (1 827 fő) 57,5%-os eredményessége adta. Elérhető az érettségik statisztikai kiértékelése ("Výsledky maturitnej skúšky 2005", 2005), az egyes szintek részletes analízise (Ringlerová & Zelmanová, 2005a) illetve (Ringlerová & Zelmanová, 2005b), amelyek tartalmazzák a teszteket is.

A tesztek eredményességét percentilre is átszámolták, ami relatív mértékként azt fejezi ki, hogy a tesztet írók korosztályhoz viszonyítva milyen a diák eredménye. Szignifikáns különbségek voltak az egyes iskolatípusok diákjainak eredményei között mindkét szinten. A fiúk és lányok eredményei között viszont nem volt kimutatható szignifikáns különbség.

Az érettségi belső részét csak az emelt szintet választók írták. Egy külön jelentés foglalkozik a külső és a belső írásbeli rész eredményeinek összehasonlításával (Ringlerová & Zelmanová, 2005b), ami alapján a belső rész átlagos eredményessége (71,7%) elmaradt a külső részétől.

2006-ban az A és a B szint is egy-egy tesztből állt, ami 20 eredménymegadós és 10 feleletválasztós tesztkérdést tartalmazott. A teszt kidolgozására 120 perc állt a diákok rendelkezésére. Az A szintű érettségi vizsgán 3 648-an vettek részt, a B szintűn pedig 8 783 diák. Az A szintű érettségi 60,4%-os átlagos eredményességgel zárult, ami a gimnazisták (3 376 fő) 62% és a többi iskolatípus (272 fő) 40,8% eredményeiből adódott. A B szintű érettségi 56,9%-os átlagos eredményességét a gimnáziumok (6 199 fő) 62,1%-os és a többi iskolatípus (2 584 fő) 44,6%-os eredményessége adta. Elérhető az érettségik statisztikai kiértékelése ("Výsledky maturitnej skúšky 2006", 2006), az egyes szintek részletes analízise (Kurajová Stopková, 2006) illetve (Zelmanová, 2006), amelyek tartalmazzák a teszteket is. Szignifikáns különbségek voltak az egyes iskolatípusok diákjainak eredményei között mindkét szinten. A fiúk és lányok eredményei között viszont nem volt kimutatható szignifikáns különbség.

2007-ben az A és a B szint is egy-egy tesztből állt, ami 20 eredménymegadós és 10 feleletválasztós tesztkérdést tartalmazott. A teszt kidolgozására 120 perc állt a diákok rendelkezésére. Az A szintű érettségi vizsgán 3 788-an vettek részt, a B szintűn pedig 6 161 diák. Az A szintű érettségi 65,4%-os átlagos eredményességgel zárult, ami a gimnazisták (3 473 fő) 67,2%, a szakközépiskolák (299 fő) 45,6%-os, az összevont középiskolák (14 fő) 39,5%-os és a középfokú szaktanintézetek (2 fő) 71,7%-os eredményeiből adódott. A B szintű érettségi 58,6%-os átlagos eredményességét a gimnáziumok (3 592 fő) 65,5%-os a szakközépiskolák (1 832 fő) 51,7%-os, az összevont középiskolák (449 fő) 44,8%-os és a középfokú szaktanintézetek (288 fő) 37,6%-os eredményessége adta. Elérhető az érettségik statisztikai kiértékelése ("Vyhodnotenie externej časti maturitnej skúšky v školskom roku 2006/2007", 2007), az egyes szintek részletes analízise (Ringlerová, 2007) illetve (Zelmanová, 2007), amelyek tartalmazzák a teszteket is. A fiúk és lányok eredményei között nem volt kimutatható szignifikáns különbség.

2008-ban az A és a B szint is egy-egy tesztből állt, ami 20 eredménymegadós és 10 feleletválasztós tesztkérdést tartalmazott. A teszt kidolgozására 120 perc állt a diákok rendelkezésére. Az A szintű érettségi vizsgán 3 533-an vettek részt, a B szintűn pedig 5 848 diák. Az A szintű érettségi 60,2%-os átlagos eredményességgel zárult, ami a gimnazisták (a vizsgázók 91,2%-a) 67,2%-os, a többi középiskola (a vizsgázók 8,7%-a) 45,5%-os eredményeiből adódott. Az eredményességet jelentő 33%-os eredményességi határt 242 diák, a vizsgázók 6,8%-a nem teljesítette. A B szintű érettségin 54,5%-os átlagos eredményesség született. Az eredményességet jelentő 33%-os eredményességi határt 918 diák, a vizsgázók 15,7%-a nem teljesítette. Elérhető az érettségik statisztikai kiértékelése (Strelková, 2008), Az egyes iskolák eredményessége, a megoldókulcs, az egyes szintek részletes analízise (Ringlerová, 2008) illetve (Juščáková, 2008), amelyek tartalmazzák a teszteket is. A fiúk és lányok eredményei között nem volt kimutatható szignifikáns különbség.

2009-től változik a matematika érettségi külső részének a formátuma: megszüntetik a szinteket és így minden matematikából érettségiző ugyanolyan teszt egy variánsával dolgozik. A teszt 20 eredménymegadós és 10 feleletválasztós tesztkérdést tartalmazott. A teszt kidolgozására 120 perc állt a diákok rendelkezésére. Ez a formátum marad 2016-ig.

A matematika érettségi vizsgán 9 250-en vettek részt és 50,2%-os átlagos eredményességet értek el. Az ekkortól bevezetett online formában 392-en vettek részt. A vizsgázók 4,8% magyar tannyelvű iskolákból volt, holott az összes érettségizők közül az magyar iskolákban tanulók aránya csak 4,1% volt. A jelentés kitér arra, hogy a matematikából érettségizők 29,3%-a nem gimnazista, illetve hogy jelentősen több fiú érettségizett matematikából, mint lány. A gimnazisták szignifikánsan jobb eredményt (56%) értek el mint a többi iskolatípus diákjai (40%), a fiúk jobb átlagos eredményessége a lányokkal szemben azonban statisztikailag nem szignifikáns. Az eredményességet jelentő 33%-os eredményességi határt 1 478 diák, a vizsgázók 16%-a nem teljesítette. Elérhető az érettségik általános kiértékelése ("Vyhodnotenie externej časti a písomnej formy internej časti maturitnej skúšky v školskom roku 2008/2009", 2009), az egyes iskolák eredményessége, az egyik tesztvariáns, a megoldókulcs, matematika érettségik jelentése (Juščáková, Kelecsényi, & Pichaničová, 2009).

A kiértékelés kiemeli, hogy a diákok legalacsonyabb eredményességet a geometriai feladatokban, illetve azokban a feladatokban, ahol elvárt a feladat szövegének helyes értelmezése.

2010-ben matematika érettségi vizsgán 9 010-en vettek részt és 59%-os átlagos eredményességet értek el. Az online formában 716-an vettek részt. A matematikából érettségizők 30,9%-a nem volt gimnazista. Jelentősen több fiú érettségizett matematikából, mint lány (63-37%). A gimnazisták szignifikánsan jobb eredményt (64%) értek el mint a többi iskolatípus diákjai (47%), a fiúk jobb átlagos eredményessége a lányokkal szemben azonban statisztikailag nem szignifikáns. Az eredményességet jelentő 33%-os eredményességi határt 790 diák, a vizsgázók 8,8%-a nem teljesítette. Elérhető az érettségik általános kiértékelése ("Správa o priebehu a výsledkoch externej časti a písomnej formy internej časti maturitnej skúšky v školskom roku 2009/2010", 2010), az egyes iskolák eredményessége, az egyik tesztvariáns, a megoldókulcs, matematika érettségik jelentése (Juščáková & Kelecsényi, 2010).

A kiértékelés kiemeli, hogy a diákok legalacsonyabb eredményességet azokban a feladatokban érték el, ahol változók, paraméterek segítségével kellett valamit kiszámolni, de alacsony volt az eredményesség az analitikus geometriai és sztereometriai feladatokban is.

2011-ben matematika érettségi vizsgán 8 803-an vettek részt és 57,9%-os átlagos eredményességet értek el. A matematikából érettségizők 34,1%-a nem volt gimnazista. Jelentősen több fiú érettségizett matematikából, mint lány (63,1-36,9%). A gimnazisták szignifikánsan jobb eredményt (64%) értek el mint a többi iskolatípus diákjai (46%), a fiúk jobb átlagos eredményessége a lányokkal szemben azonban statisztikailag nem szignifikáns. Az eredményességet jelentő 33%-os eredményességi határt 809 diák, a vizsgázók 9,2%-a nem teljesítette. Elérhető az érettségik általános kiértékelése ("Správa o priebehu a výsledkoch externej časti a písomnej formy internej časti maturitnej skúšky v školskom roku 2010/2011", 2011), az egyes iskolák eredményessége, az egyik tesztvariáns (magyarul is), a megoldókulcs, matematika érettségik jelentése (Juščáková & Kelecsényi, 2011).

A kiértékelés kiemeli, hogy a diákok legalacsonyabb eredményességet a geometriai és függvények témakörű feladatokban értek el.

2012-ben matematika érettségi vizsgán 8 753-an vettek részt és 50,8%-os átlagos eredményességet értek el. A matematikából érettségizők 35,8%-a nem volt gimnazista. Jelentősen több fiú érettségizett matematikából, mint lány (65,6-34,4%). A gimnazisták szignifikánsan jobb eredményt (57,6%) értek el mint a többi iskolatípus diákjai (38,8%), a lányok jobb átlagos eredményessége a fiúkkal szemben azonban statisztikailag nem szignifikáns. Az eredményességet jelentő 33%-os eredményességi határt 1 400 diák, a vizsgázók 16%-a nem teljesítette. Elérhető az érettségik általános kiértékelése ("Správa o priebehu a výsledkoch externej časti a písomnej formy internej časti maturitnej skúšky v školskom roku 2011/2012", 2012), az egyik tesztvariáns, a megoldókulcs, matematika érettségik jelentése (Juščáková & Kelecsényi, 2012).

A kiértékelés kiemeli, hogy a legkisebb eredményességet a térmértani feladatokban értek el vizsgázók. A gimnazisták és a középiskolások között leginkább a függvényekre vonatkozó, az analitikus geometriai és a sztereometriai feladatok eredményességében voltak nagy különbségek.

2013-ban matematika érettségi vizsgán 8 203-an vettek részt (az érettségizők 14,6%-a) és 50,9%-os átlagos eredményességet értek el. A matematikából érettségizők 34,7%-a nem volt gimnazista. Jelentősen több fiú érettségizett matematikából, mint lány (66-34%). A gimnazisták szignifikánsan jobb eredményt (58,1%) értek el mint a többi iskolatípus diákjai (37,4%), a fiúk jobb átlagos eredményessége a lányokkal szemben azonban statisztikailag nem szignifikáns. Az érettségi eredményességet jelentő 33%-os eredményességi határt jogszabállyal módosították és összekapcsolták a belső szóbeli résszel, így ez alapján nem állapítható meg egyértelműen a nem teljesítők részaránya. Elérhető az érettségik általános jelentés (Repovský, 2013), az egyik tesztvariáns, a megoldókulcs, matematika érettségik jelentése (Hajdúk, Kelecsényi, & Ringlerová, 2013).

2014-ben matematika érettségi vizsgán 7 205-en vettek részt (az érettségizők 14,4%-a) és 54,4%-os átlagos eredményességet értek el. A matematikából érettségizők 29,9%-a nem volt gimnazista. Jelentősen több fiú érettségizett matematikából, mint lány (65,7-34,3%). A gimnazisták szignifikánsan jobb eredményt (61%) értek el mint a többi iskolatípus diákjai (39,1%), a lányok jobb átlagos eredményessége a fiúkkal szemben azonban statisztikailag nem szignifikáns. Elérhető az érettségik általános jelentés (Palacková, 2014), az egyik tesztvariáns, a megoldókulcs, matematika érettségik jelentése (Palacková, 2014).

2015-ben matematika érettségi vizsgán 6 658-an vettek részt (az érettségizők 14,3%-a) és 45,7%-os átlagos eredményességet értek el. A matematikából érettségizők 27,3%-a nem volt gimnazista. Jelentősen több fiú érettségizett matematikából, mint lány (67,8-32,2%). A gimnazisták szignifikánsan jobb eredményt (51,8%) értek el mint a többi iskolatípus diákjai (29,3%), a lányok jobb átlagos eredményessége a fiúkkal szemben azonban statisztikailag nem szignifikáns. Elérhető az érettségik általános jelentés (Palacková & Kelecsényi, 2015), az egyik tesztvariáns, a megoldókulcs, matematika érettségik jelentése (Hajdúk, Kelecsényi, & Ringlerová, 2015).

A legkevésbé eredményesek a diákok egy síkmértani feladatban voltak. A sikerességről megállapították, hogy befolyásoló tényező a feladat megadásának nem kellő figyelemmel való olvasása. A legtöbb problémát azok a feladatok jelentették, ahol változók segítségével kellett algebrai számításokat végezni, illetve ahol a geometriai ismeretekre építve kellett numerikus számításokat végezni.

2016-tól a tesztek összeállításának módszertana és formátuma nem változott, de a diákok ekkortól kezdve 150 perc időt kaptak az írásbeli vizsga megoldására. A matematika érettségi vizsgán 6 068-an vettek részt (az érettségizők 13,5%-a) és 54,3%-os átlagos eredményességet értek el. A matematikából érettségizők 26,2%-a nem volt gimnazista. Jelentősen több fiú érettségizett matematikából, mint lány (66-34%). A gimnazisták szignifikánsan jobb eredményt (60,4%) értek el mint a többi iskolatípus diákjai (36,9%), a fiúk jobb átlagos eredményessége a lányokkal szemben azonban statisztikailag nem szignifikáns. Elérhető az érettségik általános jelentés (Palacková, 2016), az egyik tesztvariáns, a megoldókulcs, matematika érettségik jelentése (Repovský & Juščáková, 2016).

2017-ben matematika érettségi vizsgán 4 621-en vettek részt (az érettségizők 11,7%-a) és 45,9%-os átlagos eredményességet értek el. A matematikából érettségizők 33,4%-a nem volt gimnazista. Jelentősen több fiú érettségizett matematikából, mint lány (66,1-33,9%). A gimnazisták szignifikánsan jobb eredményt (51,1%) értek el mint a többi iskolatípus diákjai (35,5%), a lányok jobb átlagos eredményessége a fiúkkal szemben azonban statisztikailag nem szignifikáns. Elérhető az érettségik általános jelentés (Palacková, 2017), az egyik tesztvariáns (magyarul is), a megoldókulcs, matematika érettségik jelentése (Ficek, Ficová, Kurajová Stopková, & Repovský, 2017). A legkisebb eredményesség a kombinatorika, valószínűségszámítás és statisztika terén volt (a gimnáziumokban 33,2%, a többi középiskolákban 18,3%), a középiskolások számára viszont a legnagyobb gondot a planimetria (18,5%) és a függvények (25,6%) témakör jelentette.

2018-ban matematika érettségi vizsgán 5 422-en vettek részt (az érettségizők 12,8%-a) és 57,0%-os átlagos eredményességet értek el. A matematikából érettségizők 25,8%-a nem volt gimnazista. A gimnazisták szignifikánsan jobb eredményt (63,6%) értek el mint a többi iskolatípus diákjai (38,2%), a lányok jobb átlagos eredményessége a fiúkkal szemben azonban statisztikailag nem szignifikáns. Elérhető egy sajtóközlemény, az érettségik általános prezentációja ("Externá časť maturitnej skúšky v školskom roku 2017/2018-Výsledky", 2018), az egyik tesztvariáns (magyarul is) és a megoldókulcs.

2.2. Nemzetközi felmérések

Szlovákia több nemzetközi felméréssorozatba is bekapcsolódott. Ezek közül kettő a tanulók vagy diákok matematikai készségeit is mérte: a TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) és a PISA (Programme for International Student Assessment).

2.2.1. TIMSS felmérések Szlovákiában

A TIMSS felmérések (Trends in International Mathematics and Science Study) az 1959-ben alapított IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) szervezésében négyévenként követik egymást, a 2015-ös mérés 57 ország részvételével zajlott. A felmérések egyik célja a 4. és 8. évfolyamos tanulók és a középiskola utolsó évfolyamos diákok teljesítményének vizsgálata a matematika és a természettudományok területén. A felmérés fontos részét képezi a különböző háttéradatok gyűjtése is: nemcsak a tanulók, de a tanárok, szülők és iskolák is le vannak kérdezve. Így információk vannak gyűjtve a tantervek tartalmáról és azok megvalósulásáról, a tanárok munkaköri feltételeiről, felkészültségéről is, stb. Segítségével nemcsak az országon belüli matematikai és természettudományi teljesítményjellemzők követhetők nyomon, hanem az is, hogy az egyes országok tanulóinak eredményei miben térnek el egymástól. Bővebb információk a felmérésekről a https://www.iea.nl/timss-past-cycles illetve a https://timssandpirls.bc.edu/ weboldalokon találhatók meg.

Szlovákia a felméréssorozatba 1995 óta be van kapcsolódva és a felmérésben általában a 4. és 8. évfolyamos tanulók (valamelyik, vagy mindkét) korosztályának felmérése zajlott csak. A felméréssorozat Szlovákiai bebiztosítója az ŠPÚ majd létrehozása után a NÚCEM volt. Ez előbbi webhelyén nem találhatóak erről adatok, az utóbbién pedig csak a 2003-as, 2007-es és a 2011-es felmérés nemzeti jelentése található meg.

1995-ben a 4. tanulók felmérésébe Szlovákia bekapcsolódott (lásd (Mullis et al., 1997)), de a matematikai eredményességéről nem találhatóak adatok. A 8.-os tanulók méréséről szóló jelentés (Beaton et al., 1996) szerint matematikából a szlovákiai tanulók 547 pontos eredménnyel Csehország után (564 pont) az előkelő 7. helyen végzett (a nemzetközi átlag 513 pont volt, Magyarország 537 pontot ért el.) Szignifikánsan csak 4 Dél-Kelet ázsiai állam teljesített jobban. A Csehországgal való összevetés azért érdekes, mivel Csehszlovákia szétválását követően tulajdonképpen azonos alapokkal, körülményekkel és feltételekkel rendelkező iskolarendszerből indult.

1999-ben sem sikerült adatokat találnunk a 4. osztályos diákok eredményeinek összehasonlításáról. A 8. osztályos tanulók felmérésében az erről szóló jelentés (Mullis et al., 2000) alapján Szlovákia 534 pontos eredménnyel a 8. helyen végzett (a 39 országból) megelőzve a 9. Magyarországot (532 pont) és Csehországot (520 pont), míg a nemzetközi átlag 487 pont volt.

2003-ban az erről szóló jelentés (Mullis, Martin, & Foy, 2005) és a szlovákiai nemzeti jelentés (Kuraj & Kurajová Stopková, 2006) alapján az alapiskolák 8.-os és a nyolcéves gimnáziumok 4. osztályos tanulói vettek részt Szlovákiában. A 8. osztályos tanulók korosztályában a felmérésében Szlovákia 508 pontos eredménnyel a 13. helyen végzett (a 46 országból) az őt szignifikánsan megelőző 9. Magyarország (529 pont) után. Csehország nem vett részt a mérésben, és a nemzetközi átlag 467 pont volt.

2007-ben az erről szóló nemzetközi jelentés (Mullis et al., 2008) és a szlovákiai nemzeti jelentés (Jelemenská, 2008) alapján az alapiskolák 4. osztályos tanulói vettek részt Szlovákiában. Szlovákia 496 pontos átlagos eredményességgel a 21. helyen az 500 pontos átlag alatt végzett (35 országból), elmaradva az 510 pontos Magyarországtól. Csehország a 492 pontot ért el. Szlovákiánál 16 ország szignifikánsan jobbnak bizonyult. Az OECD államok átlaga 523 pont volt.

2011-ben az erről szóló nemzetközi jelentés (Mullis, Martin, Foy, & Arora, 2012) és a szlovákiai nemzeti jelentés (Galádová, Gallová, Katreniaková, Kelemen, & Stovíčková, 2013) alapján az alapiskolák 4. osztályos tanulói vettek részt Szlovákiában. Szlovákia 507 pontos átlagos eredményességgel a 24. helyen az 500 pontos átlag felett végzett (53 országból), elmaradva az 515 pontos Magyarországtól és az 511 pontos Csehországtól. Szlovákiától 19 ország szignifikánsan jobbnak bizonyult. Az Európai Unió résztvevő tagállamainak átlaga 519 pont, az OECD államok átlaga 521 pont volt.

2015-ben az erről szóló nemzetközi jelentés (Mullis, Martin, Foy, & Hooper, n.d.) alapján az alapiskolák 4. osztályos tanulói vettek részt Szlovákiában. Szlovákia 498 pontos átlagos eredményességgel a 33. helyen az 500 pontos átlag alatt végzett (49 országból), elmaradva az 529 pontos Magyarországtól és az 528 pontos Csehországtól. Szlovákiától 31 ország szignifikánsan jobbnak bizonyult.

Általánosságban megemlítenénk, hogy a kognitív folyamatok szintjei (ismeretek, alkalmazás, gondolkodás) szerint a szlovákiai diákok ismeretei általában jobbak az átlagosnál, de az alkalmazás, illetve az gondolkodás, analízis-szintézis esetén már inkább elmaradnak attól.

2.2.2. PISA felmérések Szlovákiában

A PISA (Programme for International Student Assessment) programot a kilencvenes évek végén hívta életre a legfejlettebb államokat tömörítő Gazdasági Együttműködési és Fejlesztési Szervezet (Organisation for Economic Co-operation and Development – OECD), melynek Szlovákia is tagja.

A PISA monitorozó jellegű felméréssorozat, amely három területen (alkalmazott matematikai műveltség, alkalmazott természettudományi műveltség és szövegértés) vizsgálja a 15 éves tanulók képességét. A felmérés először 2000-ben, azt követően háromévenként zajlik az OECD-tagországok és a programhoz csatlakozó egyre növekvő számú partnerországok irányításával. Az egyes mérések alkalmával egy-egy műveltségi terület nagyobb hangsúlyt kap, mint a többi.

A PISA felmérés célja elsősorban a mindennapi életben használható tudás vizsgálata. A matematika terén főként azt méri, hogy a tanulók mennyire képesek felismerni, megérteni, értelmezni és megoldani egy matematikai jellegű problémát, ha ilyennel találkoznak.

A PISA programról bővebb információk annak hivatalos weboldaláról nyerhetők ami a http://www.oecd.org/pisa/ címen érhető el. Szlovákia 2003-tól volt bekapcsolódva a PISA felmérésekbe, a NÚCEM weboldalán találhatók ennek adatai, nemzeti eredményei is http://www.nucem.sk/sk/medzinarodne_merania/project/5#420,o730.

2003-ban a PISA felmérésbe 41 ország kb. 23 millió 15 éves iskolaköteles diákja kapcsolódott be, Szlovákiából csaknem 7500 diák. 2003-ban a matematika képességek volt a központi téma. A nemzeti jelentés (Koršňáková, 2004) alapján 498 pontos eredménnyel az OECD államok átlagától jelentősen nem eltérve végzett Csehország (516 pont) és Magyarország (490 pont) között. A jelentés kitér arra is, hogy míg a szlovák tannyelvű iskolákban 498,5 pontos eredményt értek el a diákok, addig a magyar tannyelvű iskolákban 492,54 pontot, ami nem tekinthető szignifikáns különbségnek.

2006-ban a PISA felmérés nemzeti jelentése (Koršňáková & Kováčová, 2004) alapján a matematikai képességek Szlovákiában 2003-hoz viszonyítva 6 pontos csökkenéssel 492 pontos eredményt adtak, ami az OECD államok átlagától alacsonyabb, egy ponttal Magyarország (491 pont) előtt. Csehország (510 pont) az átlagnál jobban teljesített. A jelentés kitér arra is, hogy míg a szlovák tannyelvű iskolákban 492,95 pontos eredményt értek el a diákok, addig a magyar tannyelvű iskolákban 494,65 pontot, ami nem tekinthető szignifikáns különbségnek.

2009-ben a PISA felmérés nemzeti jelentése (Koršňáková, Kováčová, & Heldová, 2010) alapján a matematikai képességek Szlovákiai eredményesség 497 pontjával a 23. helyen végzett az OECD államok átlagának megfelelő teljesítménnyel, Magyarország (490 pont) és Csehország (493 pont) előtt. A jelentés szerint a szlovák és a magyar tannyelvű iskolák teljesítménye között nem volt statisztikailag szignifikáns különbség. 2003 óta az OECD államokban átlagosan 11-12 ponttal jobb eredményeket értek el a fiúk, mint a lányok. Érdekes módon 2009-ben Szlovákiában a fiúk eredményessége azonban csak átlagosan 3 ponttal volt jobb mint a lányoké.

A jelentés taglalja a használható matematikai képességgel nem rendelkező diákok (420 pont alatt) rizikócsoportjának a populáción belüli relatív nagyságát is. 2003-ban ennek az aránya Szlovákiában 19,7% volt, az OECD átlagában 21,4%, 2006-ban Szlovákiában 20,9% volt, az OECD átlagában 21,3% és 2009-ben Szlovákiában 21% volt, az OECD átlagában 22%.

2012-ben újra a matematika képességek volt a központi téma. A PISA felmérés nemzeti jelentése (Ferencová, Stovíčková, & Galádová, 2015) alapján a matematikai képességek Szlovákiában 482 pontos átlagos eredményt adtak, ami az OECD államok átlagától szignifikánsan alacsonyabb. Ezzel Magyarország (477 pont) előtt végzett, azonban elmaradt Csehországtól (510 pont). Ezzel a teljesítménnyel Szlovákia az OECD államok közül csak 5-nél ért el szignifikánsan jobb eredményt. 2012-ben Szlovákiában a fiúk eredményessége átlagosan 9 ponttal volt jobb mint a lányoké, ami az OECD államok 10 pontos szignifikáns különbségebnek megfelelő.

A használható matematikai képességgel nem rendelkező diákok (420 pont alatt) rizikócsoportjának a populáción belüli relatív nagysága Szlovákiában 27,5%-ra nőtt, míg az OECD átlagában ez az arány 23,4% volt. A legrosszabb helyzet a középfokú szaktanintézetek nem érettségiző osztályaiban volt, ahol a diákok 63,7%-a (a lányok 79,3%-a és a fiúk 57,5%-a) a rizikócsoportba tartozik, de még a legjobbnak tartott 8-éves gimnáziumok diákjai 3,2%-a a rizikócsoportba tartozik.

2015-ben a PISA felmérés nemzeti jelentése (Miklovičová, Galádová, Valovič, & Gondžúrová, 2017) alapján a matematikai képességek átlagos eredménye Szlovákiában 475 pontos volt, ami az OECD államok átlagától (490 pont) szignifikánsan alacsonyabb. Ezzel Magyarország (477 pont) és Csehországtól (492 pont) mögött végzett. 2015-ben Szlovákiában a fiúk eredményessége átlagosan csak 6 ponttal volt jobb mint a lányoké, míg az OECD államok átlagában 8 pontos szignifikáns különbséget mértek. A használható matematikai képességgel nem rendelkező diákok (420 pont alatt) rizikócsoportjának a populáción belüli relatív nagysága Szlovákiában 27,7% volt, míg az OECD átlagában ez az arány 23,4% volt.

2.3. A matematikai ismeretek méréseinek elemzése

Az előző fejezetben foglalkoztunk a Szlovákia területén a matematika tantárgyból megvalósított központi, reprezentatív mintán végzett, vagy sok esetben az egész korosztályt lefedő felmérések eredményeinek bemutatásával.

A következő alfejezetekben a felmérések eredményeinek elemzéseivel foglalkozunk, külön vizsgálva az egyes iskolai szinteken végzett felméréseket és a nemzetközi felmérések adatait, majd ezeket (az országos és a nemzetközi méréseket) is összehasonlítva. Az elemzésünkben kitérnénk a felmérésben használt tesztek összeállítására és az eredmények kiváltó okainak feltárására is.

A szlovákiai iskolarendszerben 2000-től zajlanak reprezentatív mintán, majd később a teljes korosztályt is lefedő országos felmérések. Elsőként az érettségizők (2000), pár évvel később (2003) pedig az alapiskolák végzős osztályában kerültek a tesztek alkalmazásra. Nyilvánvalóan a cél a környező országokban (pl. Csehországban és Magyarországon) is fellelhető (ajánlott/központosított) felvételi rendszer bevezetése volt a cél. A 2000-es évek elejére tehető a felsőoktatási iránti érdeklődés növekedésének kezdete. 2000-ben a felsőoktatásban 137 908 hallgató vett részt, 2009-re ez az érték 230 519 re növekedett (részletesen lásd az ezt tartalmazó statisztikai kimutatást a http://www.cvtisr.sk/buxus/docs//JC/rady/radtab10.xls címen). A felsőoktatás tömegesedésének voltak kormányzati okai is, hiszen a döntéshozók szembesültek azzal a ténnyel, hogy a fejlett gazdaságokban a populációnak jóval nagyobb hányada rendelkezik felsőfokú végzettséggel, másrészt bizonyos szakmák, munkahelyek (pl. egészségügyi nővér, óvodapedagógus, ...) kvalifikált betöltéséhez korábban középiskolai végzettség volt az elvárt, de az ezeket szabályozó jogi előírások változásainak következtében ezekhez immár egyetemi végzettség a megkövetelt.

A felsőoktatásba bekerülőknek szűrésére a felvételi vizsga volna hivatott lenni. Ez azonban a máig is érvénye jogi szabályozás miatt az érintett felsőoktatási intézmények hatáskörében van, azaz saját hatáskörben döntenek a felvenni szándékozottakról. Valószínűleg ez magyarázza a kétszintű érettségi bevezetésének szándékát is, hogy az intézmények valamilyen objektívnek tartott, összehasonlíthatónak tekinthető adatok alapján dönthessenek a jelentkezőkről, és olyan diákokat engedjenek be a képzéseikbe, akik rendelkeznek a tanulmányok sikeres teljesítéséhez szükséges alapismeretekkel. Hasonló okokra vezethető vissza az alapiskolások tesztelésének bevezetése is, mivel ennek célja is elsődlegesen az lett volna, hogy a középiskolák az itt elért eredmények alapján felvételi vizsgák nélkül, de a ismeretek és készségeknek megfelelően választhassák ki a tanulók közül, hogy kik rendelkeznek megfelelő szintű előismeretekkel az adott középfokú iskolán folytatott tanulmányokhoz.

Az elképzelés gyakorlatban történő alkalmazása azonban közel sem mondható sikeresnek, mivel az iskolák finanszírozási rendszere leginkább a diák-/hallgatói létszámot vette és veszi mind ez idáig alapul, és ezért mind a középiskolák, mind a felsőoktatást biztosító intézmények a diák/hallgatói létszám növelésére, majd később megtartására törekedtek, ahogyan ezt az oktatásügyi statisztikák idősorai (lásd a http://www.cvtisr.sk/cvti-sr-vedecka-kniznica/informacie-o-skolstve/statistiky/casove-rady.html?page_id=9724 címen, ahonnan a két bekezdéssel korábbi, illetve a következő bekezdésben található link is származik), valamint a https://www.minedu.sk/financovanie/ címen megtalálható a közoktatási, a https://www.minedu.sk/677-sk/financovanie/ címen pedig a felsőoktatási költségvetési módszertanok, az azokban található adatok is alátámasztják. Főként a demográfiai változásoknak köszönhetően, mely szerint a fiatal korosztályok alulreprezentáltak a társadalmi szerkezetben, de a felsőoktatásban a 2009-ben kezdődött gazdasági válság, majd később a gazdasági erősödés miatt is beálló munkaerőhiány miatt is csökkent a diák/hallgatói létszám, ami által az egyes iskolák és felsőoktatási intézmények a korábbi létszámok megtartásán fáradoztak. Ezért az oktatásba belépők hozott ismeret és készségszintjét kevésbé vették figyelembe. Valószínűsíthetően ennek, a hozzá fűzött remények be nem teljesülésének is betudható a kétszintű érettségi rendszerének kivezetése, megszüntetése.

A demográfiai helyzetet jól szemlélteti, hogy 1990-ben az alapiskolák felső tagozatán, tehát a tanköteles tanulók összlétszáma 367 837 fő volt, ami 1996-ig 324 342-re monoton csökkent, majd egy átmeneti növekvést követően 1999-ig 371 743 főre növekedett – ami megegyezik a 9 éves alapiskolára való átállásra – majd monoton csökkent 2016-ig, amikor 216 611 tanulója volt csak az alapiskolákra. Ha az összehasonlítható, 9-éves alapiskolák felső tagozatának tanulói létszámát nézzük, látható, hogy 17 év alatt a tanulók létszáma 58,27%-ra csökkent (részletesen lásd az ezt tartalmazó statisztikai kimutatást a http://www.cvtisr.sk/buxus/docs//JC/rady/radtab03.xls címen).

Mindezeket azért tartottunk fontosnak elmondani, hogy az olvasó tisztában legyen, hogy a tesztelések eredményeit ennek kontextusában vizsgálva a kormányzati, oktatásügyi szervek és szervezetek részéről megfigyelhetőek egyrészt egyféle hosszútávú stratégiai koncepció nélküli, vagy ad-hoc rendelkezések, másrészt pedig igyekeztek kedvezőbb képet is lefesteni a valós helyzetről.

Minden pedagógia felmérés, kutatás egyszeri és nem megismételhető, s nem olyan, mint a természettudományos kísérletek, amelyek során biztosítani tudjuk az azonos körülményeket és ily módon reprodukálható a kísérlet, és hibahatáron belül azonos eredményeket tudunk kapni. Nagy (statisztailag) mintán elvégzett felmérés esetén, hasonló de nem azonos tesztekkel a korábbi teszttől statisztikailag nem különböző eredményeket tudunk azonban elérni. Elemzéseink során ki szeretnénk térni azokra az ellentmondó tényekre, amelyek az országos mérések eredményei és a nemzetközi felmérések és az iskolai gyakorlat tapasztalatai között lelhetőek fel. Az országos felmérések eredményességi mutatóit ugyan összehasonlíthatjuk, idősorba rakhatjuk, de azok nem korrelálnak a nemzetközi felmérések trendjével sem az iskolai tapasztalatokkal (ahogy pl. a 2.1 táblázatban látható, hogy a Monitor 5 eredményessége szinte töretlen növekvő trendet mutat, az ennek a korosztálynak megfeleltethető TIMSS felmérések alapján viszont Szlovákia egyre rosszabb eredményeket ér el). A bekezdés első mondatával arra akartunk utalni, hogy a nem lehetséges ugyanazzal a mérőeszközzel (teszttel) elvégezni a felméréseket és így biztosítani azok összehasonlítását.

Az országos felmérések során is több (általában kettő) tesztvariánssal dolgoztak, amelynek eredményeit statisztikailag (kétmintás T-próbával) össze is szoktak hasonlítani. Az egyes tesztvariánsok azonban – ahogy azt egyes felmérésekről készült jelentésekben megtalálhatjuk – csak a feladatok sorrendjében illetve a feladatban szereplő adatokban, számadatokban különböznek, s nem a feladatok típusában, nehézségében. A különböző években használt tesztek eredményeinek összehasonlítása azonban már nem ilyen egyszerű, lévén a tesztek is és a tesztírók is különbözőek. Nyilvánvalóan két lehetőségünk van az összehasonlításra: vagy a teszteket hasonlítjuk össze, vagy statisztikailag kellően nagy mintán íratjuk meg a különböző években használt teszteket és a kapott eredményeket statisztikailag hasonlítjuk, értékeljük ki.

2.3.1. Az alapiskolák alsó tagozatán felmért matematikai ismeretek elemzése

Ahogyan azt az előző fejezetben ismertettük az alsó tagozatos matematikai ismeretek mérése 2012-ben kezdődött, 2015-től pedig országos szinten zajlott. A mérések eredményességét az alábbi (2.1) táblázatban foglaljuk össze:

Év	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Eredményesség	50,6-53,6%	58,4%	55,9%	62,0%	62,3%	64,7%

2.1. táblázat. A matematika tesztelések átlagos eredményessége a felső tagozat elején

Ahogyan az az adatokból látható, szinte töretlen trendben emelkedik évente a tesztek megoldásainak átlagos eredményessége. Ebből az idősorból csak a 2013-as (vagy 2014-es) adatok lógnak ki. Felmerül azonban a kérdés, hogy a korosztályok mérésének ezen tesztekkel vizsgált átlagos eredményessége összhangban van-e matematikai ismeretek és készségek szintjével, annak változásával? Sajnos nem lehetünk meggyőződve arról, hogy ennyire pozitív lenne a helyzet, hiszen a nemzetközi mérések eredményei pontosan ezzel ellentétes trendet mutatnak.

Önmagában a tény, hogy a tananyag több mint 1/3-át a tanulók nem képesek ezen tesztekből átlagosan megoldani nem tekinthető olyan jó eredménynek. A matematikai ismeretek egymásra épülése miatt nem túl kedvezőek azoknak a jövőbeni kilátásai, akiknek gondjaik vannak az alapműveletekkel.

A felmérések alapján kapott adatok, az egyes évek tesztjeinek vizsgálatával is bajban vagyunk: ahogy az ókori görög bölcs Hérakleitosz mondta: „Nem léphetünk kétszer ugyanabba a folyóba" (Platón: Kratülosz 402 A). Pedagógiai kutatások, felmérések visszatérő problémája, hogy hogyan készítsünk olyan, az eredetivel nem megegyező tesztet, amivel tulajdonképpen ugyanazt szeretnénk mérni. Az egyes években az objektív tudásszintet akarnánk meghatározni, de nyilván nem használhatjuk hozzá ugyanazt a tesztet, mert ennek ismerete deformálná az eredményeket. Nyilvánvalóan nincs semmilyen olyan egyéb eszközünk, amivel az előző évek 5. osztályos tanulóinak objektív matematika tudását össze tudnánk hasonlítani. Az egyes tesztelések eredményessége, egyszeri és megismételhetetlen. Ezért amit objektíven megtehetünk az a használt tesztek összehasonlító elemzése, mégpedig teoretikus és experimentális módon.

A teoretikus összehasonlítás az egyes feladatok szintjén tud megtörténni: az olyan feladatokat válasszunk ki az egyes tesztekből és hasonlítunk össze első körben, amelyek összevethetőek. Ha ezen párok összevetésével végeztünk, megvizsgálhatjuk, hogy mi az, aminek nem találunk párját, azaz mutassuk meg, hogy milyen feladatokban különböznek az egyes tesztek. Természetesen objektív összehasonlítást végezni e módon meglehetősen körülményes: ami számunkra, vagy az egyik tanuló számára egyszerű feladat, az egy másiknak nem kell hogy az legyen. Ezért az összevethető feladatok esetében az elvégzendő műveletek számát, a használt számkört és egyéb objektíven meghatározható adatokat tüntetünk csak majd fel. Az összehasonlítás végén igyekezni fogunk olyan szakmailag megalapozott állítást megfogalmazni a megvizsgált tesztek nehézségét illetően, ami nem lesz vitatható.

Az experimentális összehasonlítást úgy végezhetjük el, hogy az ugyanazzal, vagy ugyanolyan csoporttal oldatjuk meg a tesztet, és megnézzük, hogy az egyes megoldatott tesztek általuk megszerzett eredményessége különbözik-e egymástól. Természetesen itt is fennáll az a Hérakleitoszi dilemma: ha egy csoporttal történik a tesztelés, akkor nyilván nem lehetséges két összehasonlítandó tesztet egyidejűleg megíratni, és az időrendi sorrend befolyásolhatja az eredményességet, ha viszont két (esetleg több) csoporttal végeznénk két (esetleg több) teszt összehasonlítását, akkor hogyan válasszuk szét a tesztelőcsoportot, hogy az objektív legyen, s azokban azonos képességű tesztelők legyenek. Véleményem szerint úgy érhetjük el a legobjektívebben a kívánt eredményt, ha ugyanazon a mintán a két összehasonlítandó tesztet úgy íratjuk meg, ha a két tesztet mint két variánst íratjuk meg, majd egy következő alkalommal a tesztelőkkel a másik variánst is megíratjuk.

Egy másik elvi dilemma is felmerül: mi van, ha a tesztelésben részvevő mintacsoport például túlontúl képzett a tesztekhez és ezáltal nem volna kimutatható az egyes tesztek nehézsége. Ennek érdekében olyan mintacsoportot kellene tehát választanunk, ahol kellően nagy szórást tudunk produkálni.

Egy számunkra, szlovákiai magyarokra szintén érdekes adat lehet a tesztelés eredményeiben kimutatott eredményesség annak függvényében, hogy a tesztelő magyar vagy szlovák tanítási nyelvű iskolában végezte tanulmányait. A felmérésekről készült 2015 és 2017 közötti jelentések, prezentációk tartalmaztak erre vonatkozó adatokat is (sajnos korábbi időszakra a jelentések nem foglalkoznak ezzel). Ezt mutatja be az alábbi (2.2) táblázat:

Év	2015	2016	2017
Magyar tannyelvű iskola	50,3%	48,8%	53,2%
Szlovák tannyelvű iskola	62,8%	63,2%	66,5%

2.2. táblázat. Az alsó tagozatos matematikai eredményesség az iskolák tanítása nyelve szerint

Ahogyan az látható a felmérések közzétett adataiból a magyar tannyelvű iskolában a matematika tesztek eredményessége jelentősen alacsonyabb, mint a többségi tannyelvű iskolákban.

A magyarság szlovákiai asszimilációjának csökkentésének érdekében évek óta történtek törekvések, és magyarországi kormányzati intézkedések annak érdekében, hogy a magyar anyanyelvű diákok lehetőleg magyar tannyelvű iskolába iratkozzanak be. Ennek ellenére nem minden szlovákiai magyar anyanyelvű tanuló jár magyar tannyelvű iskolába. A roma kisebbség nem rendelkezik saját tannyelvű iskolákkal így ezen kisebbség fiataljai egyaránt szlovák és magyar tannyelvű iskolákat is látogatnak lakhelyük függvényében. Nem hivatalos adatok szerint a magyar tannyelvű iskolákban a roma származású tanulók aránya magasabb, de eloszlásuk tannyelv szerinti arányára vonatkozóan nincsenek hivatalos, hiteles statisztikai adatok.

Az egyes éves jelentések kitértek az egyes feladat-típusok összehasonlítására is. Általános tendenciaként jelentkezett, hogy a valós életből vett kontextusú feladatok eredményessége alacsonyabb volt mint az iskolai matematikai kontextusú feladatoké (amelyekkel a tanulók a tanórákon is gyakrabban találkoztak). Témakörönkénti bontásban általában a legeredményesebbnek a számok, változó és számokkal való műveletek témakört találták (amivel valószínűleg a legtöbbet foglalkoztak tanulmányaik során), míg a legkevésbé sikeresnek a kombinatorika, valószínűség, statisztika témakör bizonyult (ami az adott korosztály számára a legabsztraktabb téma).

A jelentések rendszeresen, visszatérően megfogalmazzák, ajánlásban kiemelik az értő olvasás hiányából adódó, a valós életből származó feladatok, a szöveges feladatok, valamint a diákok logikus gondolkodását fejlesztő feladatok problémakörét.

Az alábbiakban megvizsgáljuk és összehasonlítjuk a felmérésekhez használt teszteket.

A használt tesztek teoretikus összehasonlító elemzése

A használt tesztek tartalmi elemzéséhez nyilván nem törekedhetünk teljességre, hiszen az elmúlt 6 év minden egyes tesztjének alapos, részletbe menő összehasonlítása egyrészt meglehetősen nagy terjedelmű lenne, másrészt elvesznének benne az általunk kiemelendő, tendenciát mutató jelenségek, amelyeket meg tudnánk állapítani.

Ez okból kifolyólag igyekezni fogunk kiválasztani két olyan évfolyamot a tesztek közül, ahol:

- a tesztek formátuma megegyező,
- kellően nagy időbeni különbség található köztük,
- a tesztek átlagos eredményességében jelentősnek tűnő különbséget vélünk felfedezni.

Ezen feltételeinknek véleményünk szerint a 2013-as és a 2017-es évek felelnek meg leginkább. Bár a 2012-es eredményesség volt a legalacsonyabb, de az egyrészt még a pilot időszak volt, másrészt nem érhetők el a használt tesztek sem. A 2014-es teszt eredményei alacsonyabbak voltak a 2013-asnál, viszont kisebb időbeni távolság volna 2017-hez.

A vizsgált 2013-as és a 2017-es évben használt tesztek 30-30 feladatból (20 nyílt és 10 zárt, feleletválasztós) álltak, megoldásukra 60 perc állt a tanulók rendelkezésére.

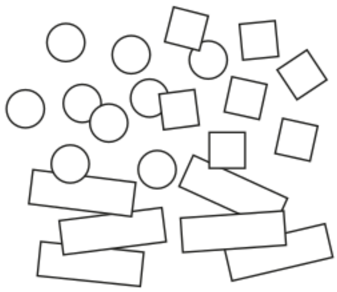
Sajnos nagyobb időbeli távolság nem található az adatok között, az adatokban látható meglehetősen nagy (6,3 %-os) különbség az átlagos eredményességében – ez kb. az átlagos eredményességi szint 10 %-ának felel meg ezekben az években.

A feladatok mindkét vizsgált esetben a lebonyolító intézet (NÚCEM) oldalán közzétett magyarra lefordított tesztekből származnak, a pontos forrás megtalálható a ("Matematikai feladatlap – Test z matematiky T5-2013", 2013) valamint ("Matematikai feladatlap – Test z matematiky T5-2017", 2017) helyen. Az alábbiakban a feladatokat ezekből átvetten közlöm. Az ábrákat a tesztekből kimásoltan, változtatás nélkül illesztettük be. Az átírás során keletkezett esetleges hibákért, elírásért a feladatok rendszerezéséért a NÚCEM nem vállal felelősséget.

A korrekt összehasonlítás érdekében az egyes tesztek nyílt feladatait hasonlítjuk előbb össze, majd a két teszt zárt, feleletválasztós feladatait fogjuk megvizsgálni:

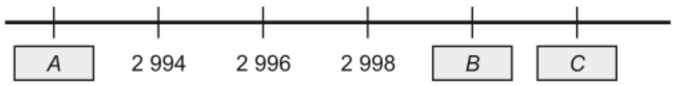
A **2013**-as teszt nyílt, feleletkitöltős feladatai:

1. A téglalap alakú zseton ▭ értéke 100, a négyzet alakú zseton □ értéke 10 és a kör alakú zseton ◯ értéke 1.
   Mennyi az értéke a képen látható zsetonoknak összesen?



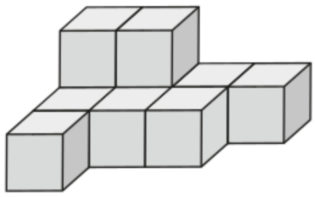
A képen látható zsetonok értéke összesen ____.

2. Melyik szám van elrejtve a számegyenesen a C-vel jelölt kártya alatt?



A C-vel jelölt kártya alatt a ____ szám van elrejtve.

3. Zsuzsi a képen látható építményt szeretné felépíteni kockákból. Hátul semmilyen kocka nem hiányzik, nem is lóg ki. Hány kockára van szüksége ennek az építménynek a felépítéséhez?



Ennek az építménynek a felépítéséhez ____ kockára van szüksége.

4. Írd be a hiányzó számokat úgy, hogy a mondatok igazak legyenek! Határozd meg beírt számok összegét!
Ha a 7-es számot háromszor nagyobbítom, akkor a ____ számot kapom.
Ha a 9-es számot kétszer nagyobbítom, akkor a ____ számot kapom.
Ha az 5-ös számot megszorzom 0-val, akkor a ____ számot kapom.
A beírt számok összege ____.

5. Lucának 3 bögréje van: pöttyös, csíkos és virágos. Ezeket a bögréket egymás mellé szeretné rakni a polcra. Összesen hányféleképpen rakhatja fel egymás mellé Luca a bögréket a polcra?

Luca a bögréket összesen ____ -féleképpen rakhatja fel a polcra.

6. A gyümölcsösben 850 kg alma termett. Körtéből 350 kilogrammal kevesebb termett, mint almából. Hány kilogramm alma és körte termett összesen?
A gyümölcsösben összesen ____ kilogramm alma és körte termett.

7. Melyik szám van felbontva ezresek, százasok, tízesek és egyesek összegére?

$$2 \cdot 1\,000 + 7 \cdot 100 + 8 \cdot 1 = \underline{\qquad\quad}$$

Válasz: $\boxed{}$

8. János 8 éves. Hányszor idősebb a nagyapa Jánosnál, ha nagyapa 72 éves?
Nagyapa $\boxed{}$ -szer idősebb Jánosnál.

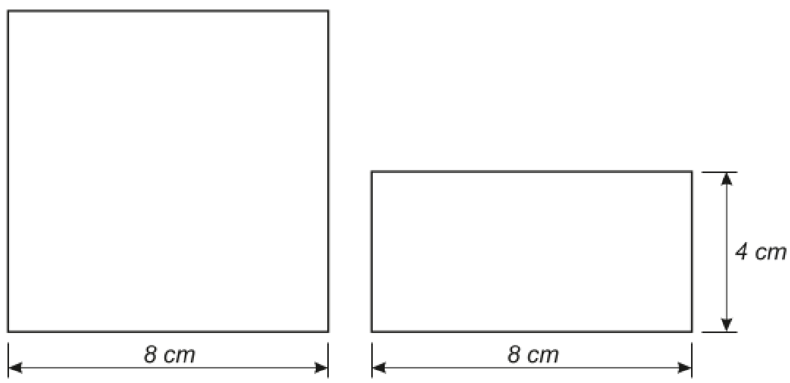
9. Válaszd ki azt a legnagyobb számot, amelyben az egyesek helyén a 4-es számjegy áll!

$$5\,794, \quad 4\,659, \quad 6\,549, \quad 7\,844, \quad 9\,465, \quad 9\,954$$

Válasz: $\boxed{}$

10. László háromnapos diákmunkán vett részt. Hétfőn 38 €-t keresett, kedden 34 €-t keresett, szerdán pedig 24 €-t keresett. A munka befejeztével az egész összeget tízesekre kerekítve kapta meg. Hány eurót kapott László?
László $\boxed{}$ eurót kapott.

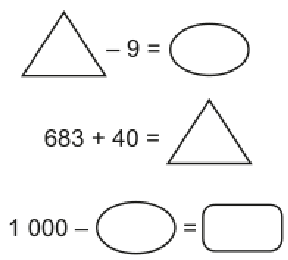
11. Az ábrán egy négyzet és egy téglalap látható. Hány centiméterrel nagyobb a négyzet kerülete a téglalap kerületénél?



A négyzet kerülete $\boxed{}$ cm-rel nagyobb a téglalap kerületénél.

12. Márton és Péter különböző számokat írtak a papírra. Márton olyan számot írt, amelyben 1 ezres, 3 százas, 5 títes, és 3 egyes volt. Péter olyan számot írt, amelyben 1 ezressel kevesebb és 3 tízessel több volt, mint Márton számában.
Melyik számot írta le Péter?
Péter a $\boxed{}$ számot írta le.

13. Az egyforma ábrák alatt egyenlő számok vannak elrejtve. Találd meg a alatt elrejtett számot!



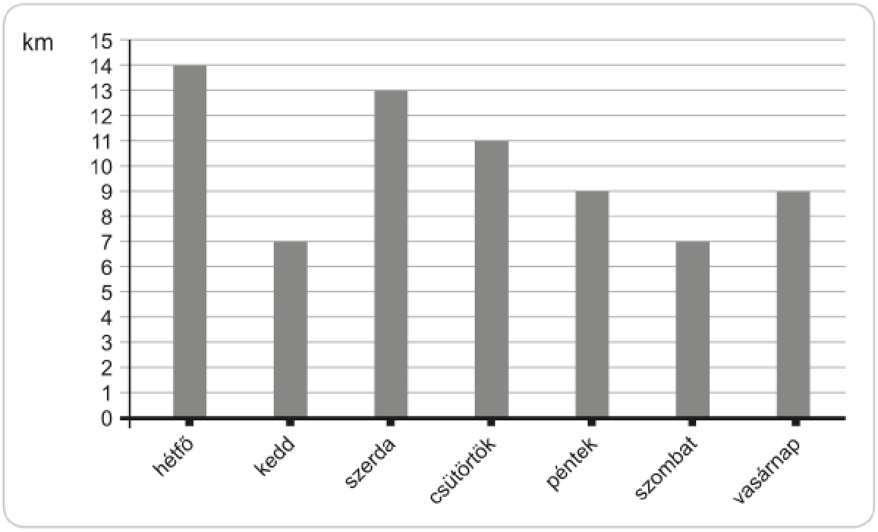
Válasz: $\boxed{}$

14. Számítsd ki:

$$2\,000 : 100 = \_\_\_\_\_\_\_$$

Válasz: ☐

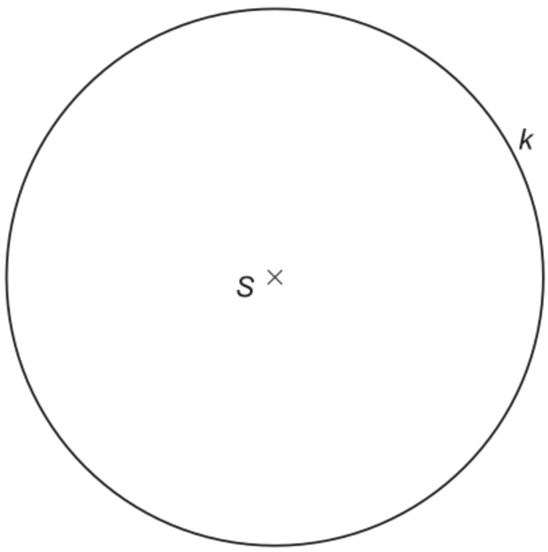
15. A Nagy család hétnapos túrát tett a Magas-Tátrában. A megtett kilométereket oszlopdiagramba jegyezték fel. Hány kilométert tett meg a Nagy család összesen az első öt nap alatt?



A Nagy család az első öt nap alatt összesen ☐ kilométert tett meg.

16. A turista 1 óra alatt 4 kilométert tesz meg. A kerékpáros 1 óra alatt 16 kilométert tesz meg. Hány óra alatt tesz meg a turista ugyanolyan távolságot, mint amilyet a kerékpáros 2 óra alatt tesz meg?
A turista ☐ óra alatt tesz meg ugyanolyan távolságot, mint amilyet a kerékpáros 2 óra alatt.

17. Az ábrán S középpontú k körvonal látható. Hány centiméter hosszú ennek a körvonalnak a sugara?

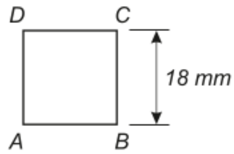


Ennek a körvonalnak a sugara ☐ centiméter sugarú.

18. Az 1 928-ból vond ki a 376-ot!
    Válasz: ☐

19. A keretbe írd be a hiányzó számot úgy, hogy a mondat igaz legyen:
    Közvetlenül a 2 099 szám után a ☐ szám következik.

20. Az ábrán egy $ABCD$ négyzet látható. József olyan KL szakaszt szeretne rajzolni, amelynek hossza az $ABCD$ négyzet oldalhosszúságának tízszerese lesz. Hány mm lesz a KL szakasz hosszúsága.

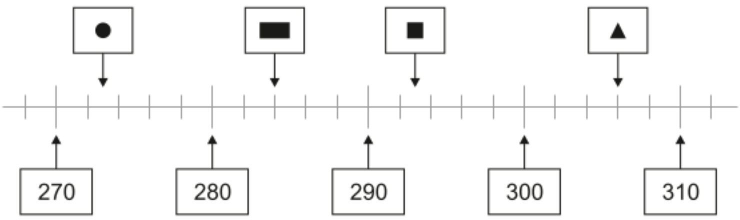


A KL szakasz hosszúsága ☐ mm lesz.

A **2017**-es teszt nyílt, feleletkitöltős feladatai:

1. Írd le azt a négyjegyű számot, amelyben csak 6 tízes és 2 ezres van.
   Az eredmény: ☐

2. Melyik szám van elrejtve a keretben lévő téglalap (▬) alatt?



A téglalap alatt a ☐ szám van elrejtve.

3. Adottak a 3 650, 3 549, 3 690, 3 559, 3 509 számok.
   Közülük melyik az, amelyiket ha százasokra kerekítjük, eredményül 3 600-at kapunk?
   Ez a szám a ☐.

4. Számítsd ki:

$$3\,247 - 1\,339 =$$

Az eredmény: ☐

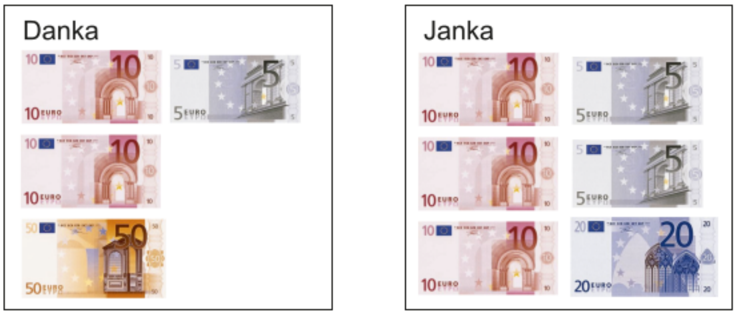
5. Szombaton a színházban 126 látogató volt. Vasárnap 220 látogató volt.
   Szombaton és vasárnap összesen hány látogató volt a színházban?
   Szombaton és vasárnap összesen ☐ látogató volt a színházban.

6. Számítsd ki:

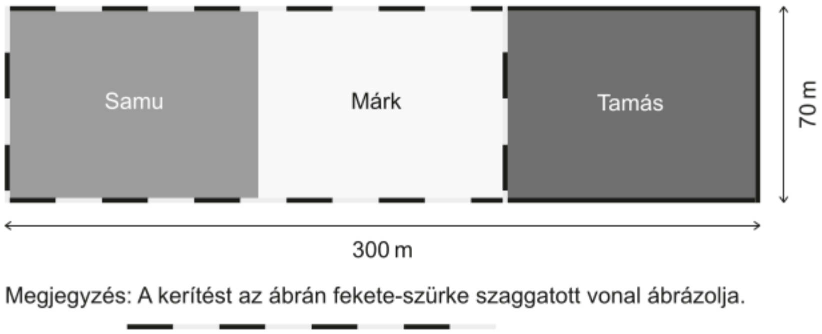
$$2\,908 + 423 + 4\,165 =$$

Az eredmény: ☐

7. Janka és testvére, Danka takarékoskodtak. Megtakarított pénzüket az ábrán láthatod.
   Hány euróval többet takarított meg Danka mint Janka?
   Danka ☐ €-val többet takarított meg, mint Janka.



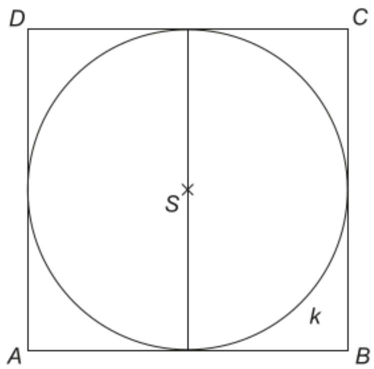
8. Apa a téglalap alakú telket felosztotta három egyforma alakú és nagyságú részre. Az ábrán a telek felosztását láthatod. Samu és Márk megegyeztek, hogy telkeiket egyesítik, és együtt elkerítik egy kerítéssel.
Hány méter kerítésre volt szüksége Samunak és Márknak telkeik elkerítéséhez?



Samunak és Márknak telkeik elkerítéséhez ☐ m kerítésre volt szüksége.

9. Hányszor kell kivonnod a 8-at az 56-ból ahhoz, hogy 0-t kapj eredményül?
A 8-at az 56-ból ☐-szer kell kivonnom.

10. Az ábrán egy $ABCD$ négyzet látható. Az AB oldal 6 cm. A négyzetbe egy S középpontú k körvonalat rajzoltunk. Határozd meg centiméterekben a k körvonal sugarát!



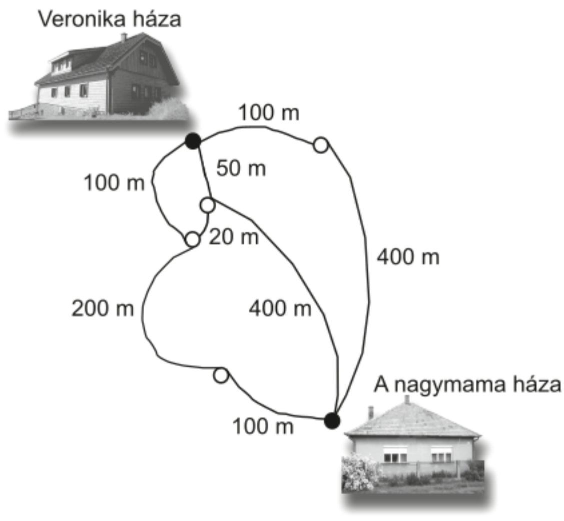
A k körvonal sugara ☐ cm.

11. A tanító néni kis csomagolású és nagy csomagolású színes ceruzákat vett a gyerekeknek. Minden kis csomagolásban 4 színes ceruza volt, minden nagy csomagolásban pedig 10 színes ceruza volt. A tanító néni 8 kis csomagolású és 9 nagy csomagolású színes ceruzát vett. Összesen hány színes ceruzát vett a tanító néni?
A tanító néni összesen ☐ színes ceruzát vett.

12. Az ábrán egy gyufakígyót láthatsz, amelyet Márk gyufaszálakból rakott ki. A gyufaszálak végeikkel érintkeztek egymással.
Hány centiméter hosszú Márk gyufakígyója, ha egy gyufaszál hossza 6 cm?

Márk gyufakígyója ______ cm hosszú.

13. Veronika otthonról nagymamájához szeretne látogatóba menni, és a legrövidebb utat keresi. Az ábrán Veronika házától a nagymama házához vezető különböző utakat és azok hosszát ábrázoltuk. Hány méter hosszú a legrövidebb út Veronika házától a nagymama házáig? A



legrövidebb út Veronika házától a nagymama házáig ______ m hosszú.

14. Péter fagyizni hívta Zsuzsát a cukrászdába. Péternek kis, gyümölcsízű fagyira van étvágya, eper, vagy barack ízűre. Zsuzsa nem szereti a gyümölcsízű fagyit, és ugyancsak 1 gombócot kér.
A kínálatból hányféleképpen választhat fagyit Péter és Zsuzsa együtt?

A kínálatból összesen ______-féleképpen választhat fagyit Péter és Zsuzsa együtt.

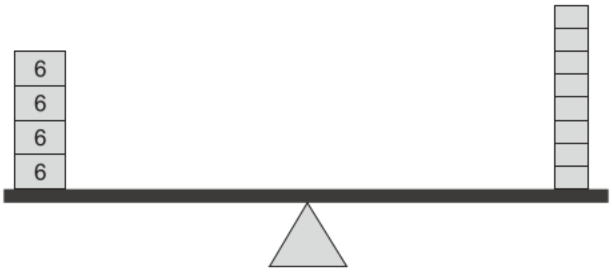
15. Az iskola igazgatónőjének 10 000 €-ja volt az épület felújítására. Ebből a tető megjavításáért kifizetett 3 460 €-t, az ablakcseréért pedig 5 930 €-t.
Hány eurója maradt az igazgatónőnek?
Az igazgatónőnek ______ €-ja maradt.

16. Jani számolás közben egy ilyen táblázatot alakított ki:

5	2	7	4	9
35	14	49	28	63

Melyik számmal szorzott meg Jani az első sorban minden számot úgy, hogy megkapja az alatta lévő számot a második sorban?
Válasz: ☐

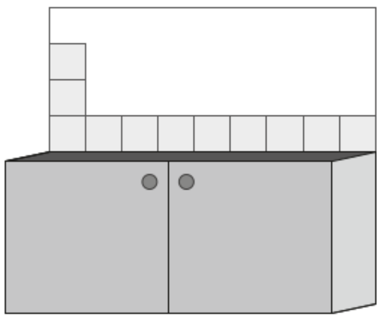
17. Az ábrán látható kétkarú mérleg egyensúlyban van. A mérleg bal oldalán négy súly van, mindegyikük tömege 6 kg. A jobb oldalon lévő 8 súly mind egyforma tömegű. Határozd meg egy darab súly tömegét kilogrammokban a mérleg jobb oldalán!



Egy darab súly tömege a mérleg jobb oldalán ☐ kg.

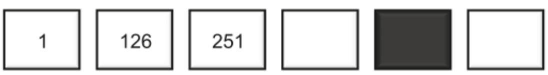
18. Fejtsd meg a találós kérdést, amelyet Edit tett fel barátainak:
„Édesanyám a nővéremnél 29 évvel idősebb. Nagyanyám az édesanyámnál 20 évvel idősebb. A nagyanyám 65 éves. Hány éves a nővérem?”
Edit nővére ☐ éves.

19. Károly a konyhában csempét ragaszt a falra. Néhány csempét már felragasztott úgy, ahogy az ábrán láthatod. Hány csempét kell még felragasztania ahhoz, hogy az egész kijelölt falrészt kicsempézze, miközben egyetlen csempéből sem kell levágnia?



Károlynak még ☐ csempét kell felragasztania.

20. A számkártyák úgy vannak sorba állítva, hogy minden következő szám az előzőnél 125-tel nagyobb.
Melyik szám van elrejtve a sötét színű kártya alatt?



A sötét színű kártya alatt a ☐ szám van elrejtve.

A nyílt tesztfeladatok összehasonlítása

Először azokat a feladatokat keressük és hasonlítjuk össze az egyes tesztekben, amelyek megfeleltethetőek, hasonlóak egymáshoz.

Valaminek a megszámlálása és a szám helyi-értékes felírása szerepel a 2013-as teszt 1. és a 2017-es teszt 7. feladatában. Míg azonban 2013-as feladatban alakzatokkal jelölt zsetonokat kellett összeszámolni, addig a 2017-es feladatban a köznapi életben használt bankjegyeket, bár itt a két megszámolás különbségét is ki kellett számolni. A feladatokat ezért azonos nehézségűnek tekinthetjük.

Egy szám helyi-értékes felírása szerepel a 2013-as teszt 7. és a 2017-es teszt 1. feladatában. Mindkét esetben négyjegyű számot kellett felírni, de 2013-ban abban nem szerepeltek tízesek, 2017-ben pedig százasok és egyesek. A 2013-as teszt 12-es feladatában is a helyi-értékes felírás szerepelt, csak ebben egy (kivonási) művelet is szerepelt még, valamint a 9. feladatban is úgy keresi a legnagyobb számot, hogy annak adott helyi-értéke (egyesek) adott számjegy legyen. Ez esetben a 2017-es feladatokat kissé igényesebbnek tekinthetjük.

Kijelölt számítási művelet 2013-ban csak a 14. feladatban szerepelt (osztás 100-al), 2017-ben a 4. és a 6. feladat is az (egy kivonás, és három szám összeadása). Ide sorolnánk azonban a 2013-as teszt 13. feladatát is, ahol a kijelölt műveletek eredménye, összevonandói jelekkel (alakzatok) voltak megjelölve. A megoldáshoz a műveletek elvégzésén kívül azok sorrendjének megállapítása is kellett. Ide sorolnánk még a 2017-es teszt 16. feladatát is, ahol egy táblázat második sorában az első sor keresett számú többszörösei szerepeltek. A feladatok nehézségéről véleményünk szerint állítható, hogy a 2013-as feladatok átlagos igényessége nem volt magasabb mint a 2017-eseké.

Számítási műveletet tartalmazó szöveges feladat 2013-ban a 4., a 6., a 8. és a 18. volt, 2017-ben pedig az 5., a 9., a 11., a 15. és a 18. feladat. Az elvégzendő műveletek száma feladatonként 5, 2, 1 és 1 volt 2013-ban, illetve 1, 2, 3, 2 és 2 volt 2017-ben. A műveletek száma mellett a nehézség szempontjából mérvadó a számkör, amiben a műveletet el kell végezni. Míg 2013-ban két feladat a 100-as számkörben, kettő (a 6. és a 18.) pedig a 10 000-es számkörben kér művelet elvégzését, addig 2017-ben három feladat a 100-as, egy (az 5.) az 1 000-es és csak egy (a 15.) a 10 000-es számkörben vett műveletek elvégzését kéri. Átlagos igényessége ezért a 2013-as feladatoknak magasabb volt, mint a 2017-eseké.

Mindkét év tesztjében a 2. feladatban a számegyenesről kellett leolvasni egy-egy értéket. A két feladat nehézsége azonosnak tekinthető.

A 2013-as teszt 5. feladata akárcsak a 2017-es teszt 14. feladata kombinatorikai volt. A 2013-as feladat elemek (bögrék) összes lehetséges sorba rendezését kérte, a 2017-es feladat független választási lehetőségek közös megítélését. Ez esetben a 2013-as feladatot tartjuk kissé igényesebbnek.

A 2013-as teszt 10. feladata akárcsak a 2017-es teszt 3. feladata a kerekítés volt. A 2013-as feladatban három értéket össze kellett adni majd tízesekre kerekíteni, a 2017-es feladatban 5 szám százasokra kerekítéséből kellett kiválasztani, hogy az a megadott érték-e? Ezért a 2017-es feladatot tartanánk igényesebbnek.

A 2013-as teszt 17. feladata akárcsak a 2017-es teszt 10. feladata a mérés volt. Mindkét esetben egy kör sugarát kellett meghatározni, a különbség annyi, hogy 2013-ban ezt mérni kellett, 2017-ben pedig a kör egy adott oldalhosszúságú négyzetbe volt beírva (a sugár és átmérő közti kapcsolat). Ezért a 2017-es feladatot tartanánk igényesebbnek.

A téglalap kerületével foglalkozott a 2013-as teszt 11. és a 2017-es teszt 8. feladata. A 2013-as tesztben azt kellett meghatározni, hogy mennyivel kisebb egy felrajzolt és kótázott téglalap kerülete, mint egy felrajzolt és kótázott négyzeté. A 2017-es feladatban az ábra alapján kellett meghatározni egy téglalap kerületét (az egyik oldalához egy távolság $\frac{2}{3}$-át kellett meghatározni). A 2017-es feladatot komplexebbnek tartjuk.

Egy szakasz többszörösének meghatározásáról szólt 2013-es teszt 20. és a 2017-es 12. feladata. 2013-ban a 18 mm tízszerese (milliméterekben), 2017-ben a 6 cm négyszerese. A két feladatot azonos nehézségűnek tekinthetjük.

Az alábbi feladatoknak nem találtunk megfeleltethető párt a másik tesztben:

A 2013-as teszt 3. feladatában az ábrázolt kockaépítmény kockáinak számát kellett megadni, a 15. feladatában egy diagramról leolvasott 5 érték összegét kellett megadni. A 16. feladat egy egyszerű mozgási példa: a kerékpáros két óra alatt 32 km-t tesz meg, ugyanezt az utat turista 8 óra alatt teszi meg. A 19. feladat a 100-as átlépésre kérdez rá (a 2 099 utáni szám).

A 2017-es teszt 13. feladatában egy gráfon kell megtalálni a legrövidebb utat. A 17. feladatban egy kétkarú mérleg egyensúlyát kéne kihasználni. Sajnos a feladatban nem szerepel egyértelműen az hogy ez egyenlő-karú mérleg volna. A 19. feladat egy csempézést kéne kiegészíteni ($9 \cdot 4$ majd kivonni ebből a már fenn lévő csempék számát – 11). A 20. feladatban egy számtani sorozat következő utáni tagját kéne meghatározni.

Az össze nem párosítható feladatok nehézségének összevetése véleményünk szerint nem eldönthető egyértelműen, globálisan, átlagosan azonos nehézségűnek minősítenénk.

A két teszt összes nyílt feladatának összevetése alapján állíthatjuk, hogy a 2017-es tesztben szereplő feladatok átlagos igényessége magasabb volt.

A **2013**-as teszt zárt, feleletválasztós feladatai:

Kiinduló szöveg: AZ ELEKTROBOLTBAN

Az elektroboltban árleszálítások hete volt. A reklámcédulán néhány kiválasztott áru eredeti ára és az árleszállítás utáni ára volt feltüntetve.

Áru	Eredeti ár	Árleszállítás utáni ár
Hűtőszekrény	670 €	440 €
Televízió	690 €	468 €
Notebook	769 €	544 €
Mosogatógép	699 €	464 €

AZ ELEKTROBOLTBAN című kiinduló szöveghez a 21. és 22. feladat kapcsolódik

21. Melyik árunál volt a legnagyobb különbség az eredeti ár és az árleszállítás utáni ár között?

    A Hűtőszekrény

    B Televízió

    C Notebook

    D Mosogatógép

22. A Kovács család élt a kedvezménnyel. Vettek televíziót és mosogatógépet.
    Mennyit adtak nekik vissza 1 000 €-ból?

    A 92 €

    B 16 €

    C 68 €

    D 96 €

23. Juli nyilakat rajzol bizonyos szabály szerint.
    MINTA: ↕↕↔↔↔↕↕↔↔↔↕↕↔↔↔↕↕↔↔
    A rajzolást a fenti szabály szerint akarja folytatni. Melyik nyilakkal kell a rajzot folytatnia

    A ↔↕↕

    B ↕↔↕

    C ↔↔↕

    D ↕↕↔

24. Károly ki akarta számolni a zsebszámológépen a $2\,187 - 194$ feladatot.
    A zsebszámológépbe ezt írta be: $2\,180 - 194$.
    Mit kell ezután tennie, hogy helyesen számolja végig a feladatot?

    A Ki kell vonnia 194-et, és utána még hozzáadnia 7-et.

B Hozzá kell adnia 7-et.

C Ki kell vonnia 7-et.

D Hozzá kell adnia 194-et és utána még hozzáadnia 7-et.

25. Melyik méret fejezheti ki az osztály hosszát az iskolában?

A 7 cm

B 7 km

C 7 dm

D 7 m

26. Márk és Julika összehasonlították cipőfűzőik hosszát. Márk cipőfűzőjének a hossza 1 m és 10 cm, Julikáé pedig 130 cm volt. A következő állítások közül melyik nem igaz?

A Julika cipőfűzője 2 cm-vel hosszabb volt, mint Márké.

B Márk cipőfűzője 20 cm-vel rövidebb volt, mint Julikáé.

C Julika cipőfűzője 200 mm-rel hosszabb volt, mint Márké.

D Márk cipőfűzője 2 dm-vel rövidebb volt, mint Julikáé.

27. Zsuzsi két számpárt a következőképpen hasonlított össze:

$$6\,875 > 7\,021$$

$$4\,798 < 4\,879$$

Válaszd ki az igaz állítást:

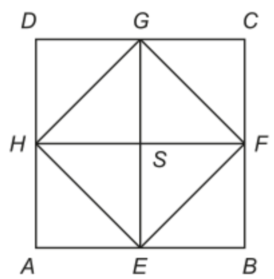
A Mindkét számpár helyesen van összehasonlítva.

B Mindkét számpár helytelenül van összehasonlítva.

C Az első számpár helyesen van összehasonlítva, a második helytelenül.

D Az első számpár helytelenül van összehasonlítva, a második helyesen.

28. Az ábrán az $ABCD$ négyzet látható. Az E, F, G, H pontok e négyzet oldalainak középpontjai. Az S pont a HF szakasz felezőpontja. Melyik alakzat téglalap?



A $EFCG$

B $AESH$

C $ABFH$

D $EFGH$

29. A háromszög egyik oldalának hossza 130 mm, másik oldalának hossza pedig 100 mm. Kerülete 300 mm. Hány milliméter hosszú a háromszög harmadik oldala?

A 170 mm

B 70 mm

C 530 mm

D 230 mm

30. A munkásoknak 200 téglájuk volt az építkezésen. Szétrakták őket kisebb rakásokba úgy, hogy minden rakásba 10 tégla került. Hány kisebb rakás keletkezett?

A 20, mert $200 : 100 = 20$

B 2 000, mert $200 \cdot 10 = 2\,000$

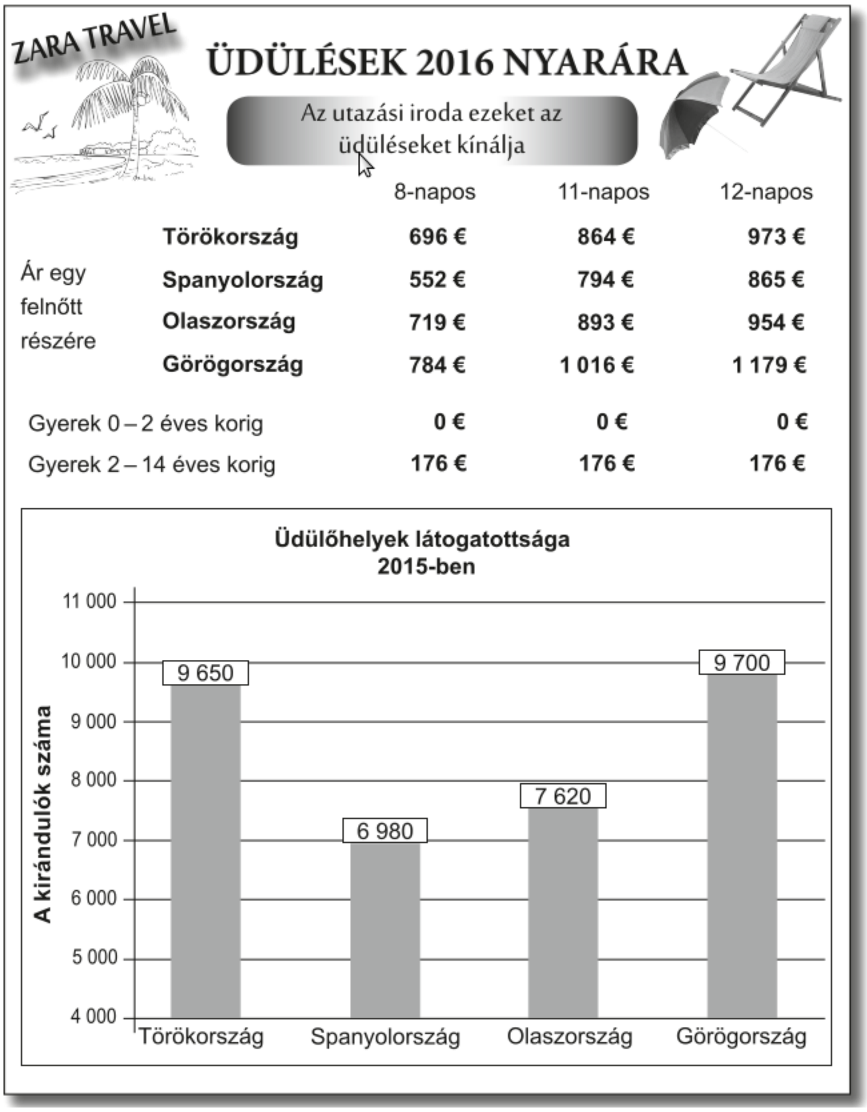
C 20, mert $200 : 10 = 20$

D 190, mert $200 - 10 = 190$

A **2017**-es teszt zárt, feleletválasztós feladatai:

ÜDÜLÉS

Kovácsné és a férje maguk és egyéves kislányuk részére a 2016-os évben 11 napos üdülésekből válogattak a ZARA TRAVEL utazási iroda ajánlatában feltüntetett üdülésekből. Az ábrán látható ajánlatban az üdülések ára 1 felnőtt ás 1 gyerek részére van feltüntetve 2016-ban, valamint az egyes üdülőhelyek látogatottsága 2015-ben.



Az ÜDÜLÉS kiinduló szöveghez a 21. és a 22. feladat tartozik

21. Hány kirándulóval több látogatta meg 2015-ben Törökországot, mint Spanyolországot?

A 2 670

B 2 720

C 16 630

D 16 680

22. Kovácsné a férjével a nyári üdülésre 1 500 €-t takarított meg. A házaspár egyéves kislányukkal együtt 11 napos üdülésre szeretett volna menni Törökországba.
Vehetett Kovácsné és férje a megtakarított pénzből 11 napos üdülést Törökországba?

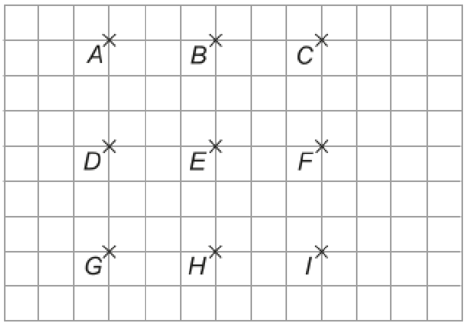
A Vehetett, és maradt 228 €-juk.

B Nem vehetett, hiányzott hozzá 228 €-juk.

C Vehetett, és maradt 404 €-juk.

D Nem vehetett, hiányzott hozzá 404 €-juk.

23. Összesen hány különböző téglalapot rajzolhatsz az ábrán látható négyzetrács kijelölt pontjainak összekötésével?



A 5-öt, mégpedig a $DFCA$, $GIFD$, $GICA$, $GHBA$, $HICB$ téglalapokat.

B 4-et, mégpedig a $DFCA$, $GIFD$, $GHBA$, $HICB$ téglalapokat.

C 3-at, mégpedig a $DFCA$, $GIFD$, $GICA$ téglalapokat.

D 2-őt, mégpedig a $DFCA$, $GIFD$ téglalapokat.

24. Melyik szám rejtőzik a (•) alatt?

$$\bullet - 993 = 2\,592$$

A 1 599

B 1 609

C 3 485

D 3 585

25. Ezek Sára és Dénes legkedveltebb ételei:

Levesek:	krumplileves	**Főétel:**	lekváros bukta
	bableves		kelt gombóc
	húsleves		rizsfelfújt
	paradicsomleves		kakaós palacsinta
	karfiolleves		túrós csusza

Az étlapot édesanya Sára és Dénes kívánságai alapján állította össze.

- Paradicsomleves nem lesz sem kedden, sem pénteken.
- Bablebes pénteken lesz.
- Lekváros bukta aznap lesz, amikor paradicsomleves.
- Kakaós palacsinta nem lesz sem csütörtökön, sem pénteken.
- Kelt gombóc aznap lesz, amikor bableves.

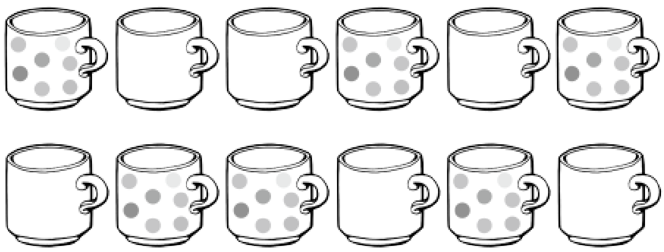
Az étlap, amelyet a táblázatban láthatsz, még nincs befejezve.

Étlap		
Nap	**Leves**	**Főétel**
Hétfő	krumplileves	
Kedd		túrós csusza
Szerda		
Csütörtök	húsleves	
Péntek		

Milyen ételek lesznek feltüntetve a szerdai napon?

A paradicsomleves, lekváros bukta
B paradicsomleves, rizsfelfújt
C karfiolleves, túrós csusza
D karfiolleves, kelt gombóc

26. Az ábrán bögrék láthatók. Néhány közülük pöttyös.



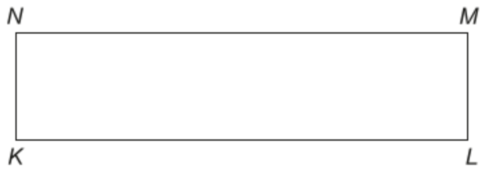
A pöttyös bögrék az összes bögre hányad részét teszik ki?

A tizenkettedét
B hatodát
C harmadát
D felét

27. Nagymama különböző nagyságú ládákban raktározza el az almát. A nagy ládában 24 kg alma volt. A közepes ládában 12 kg alma volt. A kis ládában 6 kg alma volt.
fejezd be a mondatot úgy, hogy igaz legyen!
A kis ládában

A 4-szer több alma volt, mint a közepes ládában.
B 6-szor több alma volt, mint a nagy ládában.
C 2-szer kevesebb alma volt, mint a közepes ládában.
D 3-szor kevesebb alma volt, mint a nagy ládában.

28. A $KLMN$ téglalap rövidebb oldalának a hossza 2cm. Becsüld meg a hosszabbik oldalát!



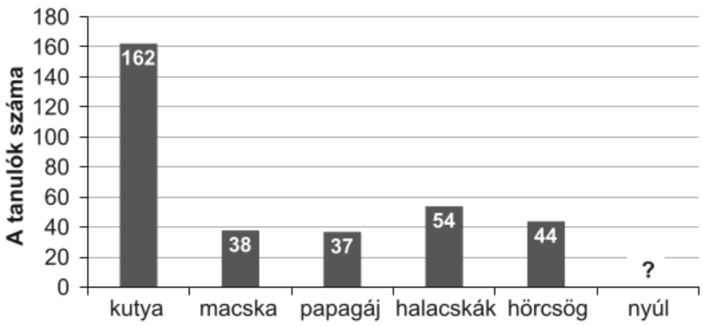
A 4 cm

B 8 cm

C 12 cm

D 16 cm

29. Az alapiskolában felmérést végeztek, amelyben összesen 365 tanuló vett részt. A felmérésben minden tanulónak erre a kérdésre kellett választ adnia: „melyik állatot választanád házi kedvencnek?"
Minden tanuló legfeljebb egy állatot választhatott ki. A felmérés eredményeit egy oszlopdiagrammal ábrázoltuk, amelyben még nincs berajzolva a nyúl válaszhoz tartalmazó oszlop.



Melyik választ választották a legkevesebbszer a tanulók?

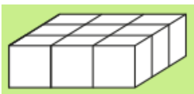
A macska

B papagáj

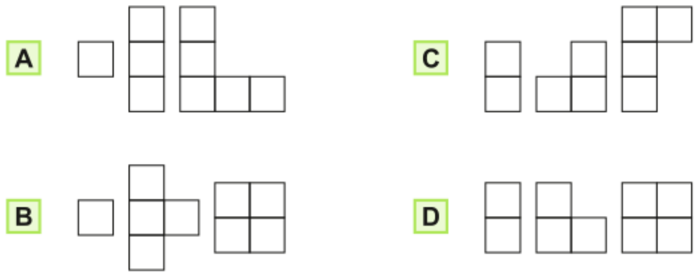
C kutya

D nyúl

30. Laci kockákból építményt épített.



Az építményt lerajzolta egy papírra, úgy, ahogyan azt felülről látta. Azután a rajzot szétnyírta 3 részre. Melyik lehetőségben látható a 3 szétnyírt rész?



A zárt tesztfeladatok összehasonlítása

Mindkét vizsgált évben az első két zárt feladat táblázat (és 2017-ben még diagram is) adatait kellett kiolvasni és feldolgozni. A 2017-es feladatok azonban komplexebbek voltak és több adatból kellett kikeresni a megfelelőeket.

A 2013-as teszt 28. és a 2017-es teszt 23. feladata szintén párba állíthatóak: mindkét feladatban téglalapot kellet keresni az ábrán. A különbség annyi, hogy a 2017-es feladatban az összes téglalap számát kellett megadni. Vigyázat a megoldással: a tesztekben a négyzetet nem tekintik téglalapnak! Ezért a 2017-es feladatot tartjuk igényesebbnek.

A 2013-as teszt 25. és a 2017-es teszt 28. feladata távolság becsléséről szólt: az első egy valós hely (a tanterem) lehetséges hosszát, a másik egy felrajzolt téglalap oldalának hosszát kellett megbecsülni a másik oldal hosszának ismeretében. E tekintetben a 2017-eset tartanánk egyszerűbbnek.

Mennyivel vagy mennyiszer több avagy kevesebb meghatározásáról szól 2013-as teszt 26. (mennyivel?) és a 2017-es teszt 27. (mennyiszer?) feladata. Az első esetben a feladatot a mértékegységek átváltása nehezítette, valamint, hogy a nem igaz állítást kellett kiválasztani, a másodikban az, hogy három láda volt. Ezért a 2013-es feladatot tartjuk igényesebbnek.

Az alapműveletek alkalmazását tűzi ki a 2013-as teszt 30. és a 2017-es teszt 24. feladata. Az előbbinél ki kell választani, milyen művelet kell, és megtalálni annak helyes számítását, a 2017-es feladatnál pedig meg kell találni a kivonás ellentett műveletét és elvégezni azt. Ezért a 2013-es feladatot tartjuk egy kissé igényesebbnek.

A többi feladat esetében nem tudtuk őket párba állítani:

A 2013-as teszt 23. feladata mintázatfelismerésről és folytatásról, a 24. összevonási műveletekről szól. A 27. feladat természetes számok nagyság szerinti összehasonlítását kapcsolja össze a logikával. A 29. feladat a háromszög kerületének alkalmazásáról szól.

A 2017-es teszt 25. feladata egy logikai táblázatkitöltős feladat, a 26. a tört (hányad rész) megnevezését kéri. A 29. feladatban a grafikonról leolvasott értékek összegét kellett kivonni a tanulók számából, hogy lássuk mennyien választották a nyulat kedvencnek – majd dönteni. A 30. feladatban azt kellet kiválasztani melyik lehetőség alakzataiból rakható össze a 3x3-as négyzet.

Az össze nem párosítható feladatok összehasonlításában egy kissé a a 2017-es faladatokat tartanánk igényesebbeknek.

Összességében véve a zárt feladatok nehézségét a két tesztben körülbelül azonosnak tekinthetjük.

A tesztek nehézségének összehasonlítása

A tesztek összehasonlítását két részben végeztük el, előbb a nyílt, feleletkitöltős feladatokat vetettük össze, majd ezt tettük a zárt, feleletválasztós feladatokkal is.

A nyílt kérdések esetében a 2017-es tesztben szereplő feladatok átlagos igényességét magasabbnak találtuk, a zárt kérdések esetében pedig közel azonosnak. Ezért globálisan véleményünk szerint megalapozott azt állítani, hogy a 2017-es teszt egy kissé igényesebbnek tekinthető.

A használt tesztek experimentális összehasonlító elemzése

Az experimentális tesztelés mérőeszközeiről nem kívánunk részletesebben szólni, hiszen a vizsgált, használt tesztek a Testovanie 5 felméréssorozat 2013-as és 2017-es tesztjei, amelyeket közöltünk is az előző, teoretikus összehasonlítással foglalkozó alfejezetünkben. Ebből kifolyólag nyilvánvaló, hogy ezek létező (bemért, validált) tesztek, éppen ezért nem foglalkoztunk a teszt ilyen jellegű vizsgálatával (validitás, reliabilitás és objektivitás).

A tesztek experimentális összehasonlítását úgy végeztük el, hogy ugyanazzal a mintacsoporttal oldattuk meg mindkét tesztet. A teszteket mint variánsokat oldották, a csoport egyik fele az egyik tesztet oldotta, a másik fele a másikat, majd egy következő alkalommal az ellenkező, még meg nem írt tesztet.

A tesztek megírásába a Selye János Egyetem Tanárképző Kara óvópedagógia és tanító szakos nappali tagozatos hallgatóit vonták be kollégáink. A tesztek kitöltői tehát azok a hallgatók voltak, akik tanulmányaik sikeres elvégzése után pontosan azon alsó tagozatos tanulókat fogják tanítani, akik tudásukról ezen tesztfelmérés-sorozat keretein belül kell majd számot adniuk. A tesztek megoldásába 262 ilyen hallgató volt bekapcsolva. A tesztek megíratása 2018 novembere és 2019 februárja között zajlott le. A tesztek 30-30 feladatból álltak, amelyek közül mindegyik 1 pontot ért. Ennek feleltethető meg a százalékban kifejezett eredményesség is, ahol 1 feladat 1 pontnak és az $3,\overline{3}\%$-nak felel meg. A tesztek a hallgatók általában valamelyik matematika tantárgyuk szemináriumi óráin voltak megíratva, ahol a kollégák a teszt-eredményeik tantárgyuk értékelésének figyelembe vételével igyekezték a hallgatókat jobb eredményességre motiválni. A hallgatók tudtak arról, hogy tesztet fognak írni, de, hogy milyen tesztet, arról nem. E helyen ragadnám meg a lehetőséget, hogy köszönetet mondjak kollégáimnak, közülük is főként Jaruska Lászlónak, Fehér Zoltánnak, a tesztek megíratásáért, javításáért és eredményeik feldolgozásáért.

Az adathalmazon végrehajtott statisztikai elemzés szerint a 2013-as teszt átlagos elért pontszáma 24,83 (82,8%), elemszáma 262 és szórása 3,53 (varianciája 12,49), míg a 2017-es teszt átlagos elért pontszáma 24,18 (80,6%), elemszáma 258 és szórása 4,52 (varianciája 20,39) volt. A szórásokra elvégzett F-próba alapján a két sokaság szórása nem tekinthető azonosnak (a próbafüggvény értéke 1,6323 volt, ami nagyobb az 1,2272-es kritikus jobboldali és az 1,2763-a kritikus kétoldalas tesztelés felső küszöbénél is az adott szabadságfokokhoz, azaz 5%-os szignifikancia szinten biztosan állíthatjuk, hogy a két minta szórása nem tekinthető azonosnak, a 2017-es teszt eredményeinek szórása biztosan nagyobb), ezért is az eredménysorokon kétmintás t-próbát nem végeztünk.

A nyers adatokat áttekintve az adathalmazon tisztítást végeztünk. Egyrészt, első körben kiszűrtük az adathalmazból azon hallgatók teszt-eredményeit, akik csak az egyik tesztvariánst oldották. Másrészt megvizsgáltuk és nem vettük figyelembe az egyazon hallgató által leadott tesztek eredményeit, ha köztük nagy eredményességbeli különbség volt. Nyilvánvalóan nem volna szerencsés és objektív olyan személyek eredményeit szerepeltetni ahol indokolatlanul magas különbség volt megfigyelhető. A nyers adatok egyes tesztekre vonatkozó átlagjainak különbsége $(2,16\%)$ nem olyannyira jelentős, hogy indokoljon nagy eltéréseket (pl. volt olyan hallgató, aki az egyik tesztet 80%-ra, a másikat viszont csak 13%-ra írta meg). Kiszűrtük ezért azoknak a személyeknek az adatait, ahol az egyes tesztek eredményességében 10 pontos, vagy annál nagyobb különbség, illetve $\frac{2}{3}$-osnál alacsonyabb, vagy $\frac{3}{2}$-esnél magasabb arány volt megtalálható. Habár egy teszt írásakor a teszt írójának pillanatnyi állapota befolyásolni tudja az elért eredményességet, de azzal nem volnának magyarázhatóak egyazon személynél az általunk kizárt extrémül magas abszolút és relatív különbségek.

A tisztított adathalmaz mindkét tesztnek ugyanazon 243 tesztírójának eredményeit tartalmazza. Ezek alapján a 2013-as teszt átlagos elért pontszáma 25,00 (83,3%) és szórása 3,47 (varianciája 12,04), míg a 2017-es teszt átlagos elért pontszáma 24,66 (82,2%) és szórása 3,79 (varianciája 14,42) volt. Az átlagok közötti különbség 0,34 volt.

Mivel ki lettek szűrve azok, akik nem írták meg mindkét tesztet és a megtisztított adathalmaz minden tesztírójának mindkét teszteredményét ismerjük, ezért az adatokra páros t-próbát tudtunk végezni. Annak ellenére, hogy az egymintás Kolmogorov-Smirnov teszt eredménye a különbségek eloszlására elveti a normális eloszlás feltételezését, a t-próba elvégezhető az elegendően nagy (N=243) elemszámú minta miatt.

A pontszámok értékeivel végzett páros t-próba alapján (t=1,753, df=242, p=0,081) nem vethetjük el azon nullhipotézisünket (feltételezésünket) miszerint a két átlag egyenlő.

Habár a nyers és a tisztított adathalmaz átlagos eredményei között is látható volt az eredmények közötti eltérés, de azok (ahogy fent látjuk) statisztikailag nem szignifikánsak.

Ez a statisztikai elemzés (ez a nem szignifikáns de mégis látható különbség, miszerint a 2013-as teszten ugyanaz a társaság átlagosan jobb eredményt ért el) összevág a tesztfeladatok teoretikus elemzése során megállapított gyenge igényességi különbséggel a 2017-es teszt javára.

A 2.1. táblázatban feltüntetett országos szintű átlagos eredményességnövekedés tehát valószínűleg nem annak tudható be, hogy kevésbé igényes tesztekkel mérnék a korosztály diákjainak matematikai kompetenciáit. Mind a tesztek elméleti, mind kísérleti összehasonlítása is azt hozta ki, hogy egy kissé, de nem szignifikánsan a 2017-es teszt volt az igényesebb, tehát Testovanie-5 teszteléssorozat valószínűsíthetően objektíven mér. A nemzetközi felméréseken Szlovákia folyamatos hátrább csúszásának feltehetően más okai vannak (a tesztelésekben részt vevő országok változó összetétele, más típusú feladatok, az olvasási készségek hiánya, . . .).

A tesztek eredményeinek vizsgálatai során az egyes tesztfeladatok mért igényességeit is meg tudtuk az adott mintán nézni. Ezek alapján meg lehetne vizsgálni, hogy az elméleti feladatösszehasonlítás a gyakorlatban, az adott mintán mért adatokkal mennyire volna alátámasztható.

Az érdekessége miatt megemlíteném viszont még azt a tényt, hogy az experimentális vizsgálataink során egy feladatot találtunk, aminek átlagos eredményessége nem érte el az egyetemisták körében az 50%-os eredményességi értéket sem, ez pedig a 2013-as teszt 11. feladata volt. Az ennek párul választott 2017-es feladatot komplexebbnek tartottuk, mégis annak eredményessége 67%-os volt.

2.3.2. Az alapiskolák felső tagozatán felmért matematikai ismeretek elemzése

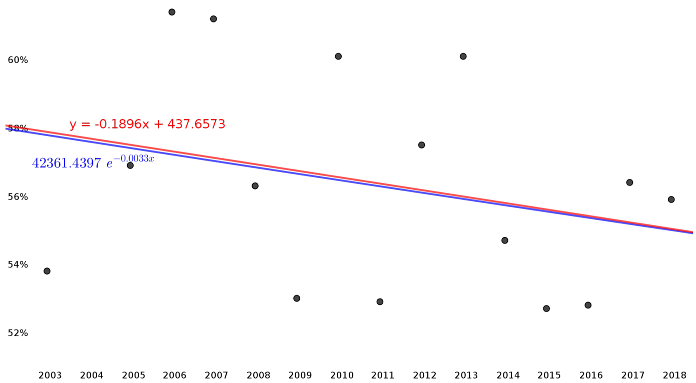
Az alapiskolák felső tagozatán a matematika tárgyból 2003-tól zajlottak országos felmérések (Testovanie 9), aminek első két évében ezt egy reprezentatív mintán végezték, ezt követően a teljes korosztályt lefedően. Az első 5 évet pilot időszakként értékelték. A felméréssorozat eredményeit (átlagos eredményességet) az alábbi (2.3.) táblázatban foglaljuk össze. Egyazon táblázatban mutatjuk be az országos eredményességet és a magyar tannyelvű iskolákban elérteket is (amennyiben ez az egyes felmérésekről készült jelentésekben szerepelt).

Átlagos eredményesség		
Év	országos	magyar tannyelvű iskolák
2003	53,8%	–
2004	43,9%	–
2005	56,0%	62,25%
2006	61,4%	59,87%
2007	61,2%	–
2008	56,31%	–
2009	53,01%	50,70%
2010	60,11%	58,90%
2011	52,9%	–
2012	57,5%	54,9%
2013	60,1%	55,9%
2014	54,7%	55,0%
2015	52,7%	46,6%
2016	52,8%	45,5%
2017	56,4%	48,8%
2018	55,9%	44,8%

2.3. táblázat. A matematika tesztelések átlagos eredményessége a felső tagozat végén

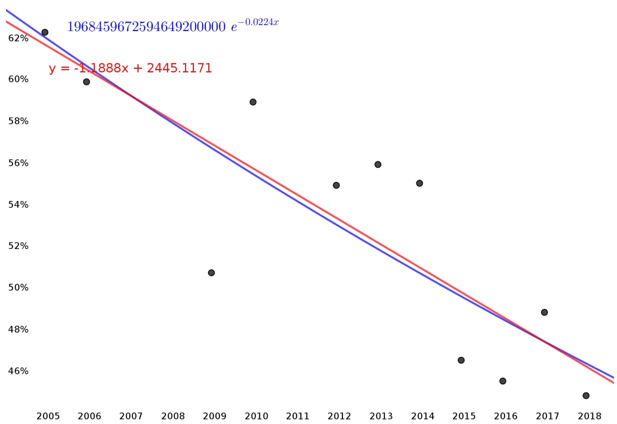
A fenti két idősor egymással való összehasonlítása nem nehéz: a magyar tannyelvű iskolák tanulói csak egyszer, 2005-ben értek el az országostól jobb eredményt; 2012-ig, illetve 2014-ben az országos átlagtól pár százalékkal voltak csak gyengébbek – ami valószínűleg statisztikailag nem szignifikáns még – azonban 2015-től szemmel láthatóan gyengébb az eredményességük. A különbség statisztikai vizsgálatához sajnos nincsen elégséges adatunk (szórások). Ami az egyes idősorokat illeti, azok elemzése során lineáris és exponenciális trendjét megállapítva mondánk meg annak alakulását jellemző mutatókat.

Az országos átlagos eredményesség idősorából a 2004-es adat nagyon kilóg, ezért ezt a kirívó értéket kihagyjuk. A megmaradt 15 adat elégséges a trend meghatározásához. Ahogyan az az adatokból, illetve a 2.1. ábrán is látható, az idősor meglehetően nagy fluktuációt mutat, nagy az eltérés-négyzetösszeg (126), a kapott lineáris és exponenciális trendek közel megegyeznek, és mindkettő csökkenő tendenciát mutat.



2.1. ábra. Az országos átlagos eredményesség idősora

A magyar tannyelvű iskolák átlagos eredményességének idősorába a meglévő 11 adat elégséges a trendek meghatározásához. Ahogyan az az adatokból, illetve a 2.2. ábrán is látható, az idősor kapott lineáris és exponenciális trendjei közel megegyeznek, és mindkettő meglehetősen csökkenő tendenciát mutat, kisebb az eltérés-négyzetösszeg is (106). A két idősor trendjei alapján látható, hogy a magyar tanítási nyelvű iskolákban az elért átlagos eredmények sokkal meredekebben csökkennek, mint országos szinten (a lineáris trend meredeksége $-0,1896$ volt országos szinten, és $-1,1888$ a magyar tanítási nyelvű iskolákban).



2.2. ábra. A magyar tannyelvű iskolák átlagos eredményességének idősora

A felméréssorozat éves szinten közzétett jelentéseiben foglalkozik az egyes témakörök szerinti bontással (a feladatok mekkora hányada volt az egyes témakörökből, illetve, hogy milyen volt ezek eredményessége) és 2010-től az egyes feladatok kognitív szintjei szerinti besorolással és ezek szerinti eredményességekkel is.

A feladatok aránya az egyes témakörök szerint többször is változott. Általános trendként az emelhető ki, hogy a kombinatorikai, valószínűségszámítási és statisztikai témakörből, majd az ehhez csatolt logika témakörből származó feladatok aránya nő (2018-ra 30%). A leggyakrabban a geometriai feladatokat tartalmazó témakör eredményessége volt a legkevésbé eredményes.

A kognitív szintek szerint (ennek definícióját is változtatták közben) általánosságában elmondható, hogy a magasabb kognitív szintekbe sorolt feladatok átlagos eredményessége elmaradt az egyszerűbb, megértésre és alkalmazásra irányulóktól.

A korábban leírtakkal összhangban felmerül a kérdés, hogy a kapott átlagos eredményességet mutató számadatok mennyiben vethetőek össze. A kérdés azért is jogos, mert a tesztelés feltételei, a tesztformátumok is változtak (a tesztfeladatok száma, a megoldásra szánt idő, az egyes témakörök reprezentáltsága, ...).

A használt tesztek összehasonló elemzése

A használt tesztek tartalmi elemzéséhez nyilván nem törekedhetünk teljességre, hiszen az elmúlt 16 év minden egyes tesztjének alapos, részletbe menő összehasonlítása egyrészt meglehetősen nagy terjedelmű lenne, másrészt elvesznének benne az általunk kiemelendő, tendenciát mutató jelenségek, amelyeket meg tudunk állapítani.

Ez okból kifolyólag igyekezni fogunk kiválasztani két olyan évfolyamot a tesztek közül, ahol:

- a tesztek formátuma lehetőleg mindinkább megegyező,
- kellően nagy időbeni különbség található köztük,
- a tesztek átlagos eredményességében jelentősnek tűnő különbséget vélünk felfedezni (mind az országos, mind a magyar tannyelvű iskolák esetében).

Ezen feltételeinknek véleményünk szerint a 2010-es és a 2018-an évek felelnek meg leginkább. Bár a 2006-os eredményességi adatok még magasabbak, de az egyrészt még a pilot időszak volt, másrészt akkor még a teszt formátuma is más volt (30 feladat, 90 perc a megoldásra), illetve a feladatok témakör és kognitív szint szerinti meghatározása sem volt megadva.

A feladatok mindkét vizsgált esetben a lebonyolító intézet (NÚCEM) oldalán közzétett magyarra lefordított tesztekből származnak, a pontos forrás megtalálható a ("Certifikált mérés matematikai feladatlapja – Certifikačný test z matematiky T9-2017", 2010) valamint ("Certifikált mérés matematikai feladatlapja – Certifikačný test z matematiky T9-2018", 2018) helyen. Az alábbiakban a feladatokat ezekből átvetten közlöm. Az ábrákat a tesztekből kimásoltan, változtatás nélkül illesztettük be. Az átírás során keletkezett esetleges hibákért, elírásért a feladatok rendszerezéséért a NÚCEM nem vállal felelősséget.

A vizsgált 2010-es és a 2018-as évben használt tesztek 20 feladatból (10 nyílt és 10 zárt feleletválasztós) álltak, megoldásukra 60 perc állt a tanulók rendelkezésére. A 2010-es teszt 30%-ban aritmetikai, 30%-ban algebrai, 30%-ban geometriai és 10%-ban kombinatorikai, valószínűségszámítási és statisztikai feladatokat tartalmazott, ami azt jelenti, hogy 6 feladat aritmetikai, 6 algebrai, 6 geometriai és 2 kombinatorikai, valószínűségszámítási és statisztikai volt. A 2018-as 20%-ban aritmetikai, 25%-ban algebrai, 25%-ban geometriai és 30%-ban kombinatorikai, valószínűségszámítási és statisztikai, valamint logikai feladatokat tartalmazott, ami azt jelenti, hogy 4 feladat aritmetikai, 5 algebrai, 5 geometriai és 6 kombinatorikai, valószínűségszámítási és statisztikai volt. A vonatkozó jelentés tartalmazza azt is, hogy melyek az egyes témakörbe tartozó feladatok. A 2010-es jelentés nem tartalmazza a feladatok témakörök szerinti besorolását, így azt mi végeztük el – remélhetően úgy, mint a tesztelés kiértékelői. A feladatok kognitív szintjének meghatározása azonban nem azonos besorolás szerint történt.

A tesztelés során mindkét évben a tanulók számára engedélyezett volt számológép használata.

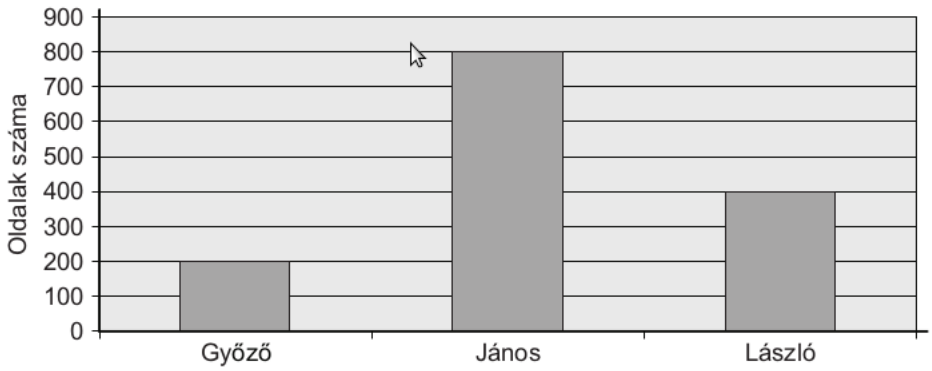
A korrekt összehasonlítás érdekében a feladatokat témakörönként fogjuk megvizsgálni:

Aritmetika témakör
2010-ben 4 nyílt, eredménymegadós és 2 zárt, eredményválasztós feladat volt.
2018-ban 2 nyílt, eredménymegadós és 2 zárt, eredményválasztós feladat volt.

Első körben vizsgáljuk meg a nyílt feladattípus feladatait.

2010 nyílt, eredménymegadós feladatai:

- A fémrúd 1,2 méter hosszú. Hány deciméterrel rövidebb a fémrúd egy negyede, mint az öt hatoda?
- A három kolléga, Győző, János és László egy 1 400 oldalas könyvet írt közösen. Az alábbi grafikon azt mutatja, hogy melyikük hány oldalat írt. A könyv kiadásáért 2 100 euró honoráriumot kaptak. A honoráriumot olyan arányban osztották szét, amilyen arányban volt az egyénenként megírt oldalak száma. Hány euróval kapott kevesebbet Győző, mint János?



- Számítsátok ki a $[(-2)^2]^3$ számkifejezés értékét.
- A faiskolában egy borókafenyő kiültetésére 1,25 négyzetméter területet számítanak. Hány borókafenyőt ültettek ki egy 9 áras területre?

2018 nyílt, eredménymegadós feladatai:

- Számítsd ki, és az eredményt írd le tizedes tört alakjában!

$$\frac{3}{4} - 1\frac{2}{5} + 0,5 =$$

- Adott az $A = 753\ 672$ szám. Számítsd ki az A szám százasokra kerekített értékének és az A szám, tízesekre kerekített értékének különbségét!

2010 első feladatában egyrészt a métert ajánlott volt deciméterre alakítani, majd a kapott 12 deciméter hosszúságnak ki kellett az egy negyedét (3 dm) és az öt hatodát (12 dm) számítani, ami a törttel való szorzás műveletének ismeretét használja. A két kapott egész érték kivonása már nem nehéz művelet, ha jól értelmeztük a feladatot. Természetesen kiemeléssel is megoldható lett volna a feladat ($12\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{4}\right) = 12 \cdot \frac{2\cdot5-3\cdot1}{12} = 12 \cdot \frac{10-3}{12} = 12 \cdot \frac{7}{12} = 7$).

A második feladatban a legegyszerűbb megoldás az, ha kiszámoljuk, hogy egy oldalért $\frac{2100}{1400} = 1,5$ euró honorárium jár. Itt tulajdonképpen az egyenes arányosság alkalmazása van használva. János 800 oldalt írt, Győző 200-at, ezért János 1200 euró honoráriumot kapott, Győző pedig 300-at. Ezek alapján Győző $1200 - 300 = 900$ eróval kapott kevesebbet, mint János.

A harmadik feladatban a hatványozás fogalmát és esetleg annak tulajdonságait kellet volna a tanulónak ismernie. A feladat megoldható a hatvány hatványozásának tulajdonságainak felhasználásával, de elégséges volna a hatványozás fogalmát ismerni, valamint azt, hogy először a zárójelen belüli négyzetre-emelést végezzük el ($(-2)^2 = (-2)\cdot(-2) = 4$), majd ezt emeljük köbre ($4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$).

A negyedik feladat újfent egyenes arányosságot rejt, de megoldható egyszerűen a 9 ár = 900 négyzetméter terület 1,25 négyzetméterrel való osztásával is.

A **2018**-as teszt első feladatában egy törtet, egy vegyes számot és egy tizedes törtet tartalmazó összevonást kell elvégezni. Mivel az eredményt tizedes tört alakban kérik, kézenfekvő a számok tizedes törtté való alakítása. Ezt követően tizedes törtek összeadását és kivonását kell elvégezni. Természetesen helyes megoldás volna tört alakban elvégezni az összevonást és az eredményt tizedes törtté alakítani. Ne feledkezzünk meg azonban arról, hogy a tesztek megoldásához a tanulók használhattak számológépet, így viszont valószínűsíthetően az első megoldásmenetet használták többen. A tizedes törtté alakításhoz a tanulónak csak a tört és a vegyes szám fogalmát kellet volna ismernie (a tört tk. jelölt osztás: $\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0,75$; a vegyes szám pedig egy egész szám és egy tört összege $1\frac{2}{5} = 1 + 2 : 5 = 1 + 0,4 = 1,4$). A többi már csak tizedes törtek összeadása és kivonása $(0,75 - 1,4 + 0,5 = -0,15)$, ami szintén számológéppel is elvégezhető.

A feladat átlagos eredményessége 53% volt, amit a jelentés készítői közepes nehézségűnek tartottak.

A második feladat egy szám százasokra és tízesekre kerekített értékének különbsége. A kerekítés fogalmának ismerete és alkalmazásán kívül csak két természetes szám különbségét kellett kiszámítani. Százasokra kerekítéskor felfelé fogunk kerekíteni mert a tízesek helyén szereplő 7-es számjegy nagyobb vagy egyenlő mint 5 (753 700), a tízesekre kerekítéskor pedig lefele, mert 2 kisebb mint 5 (753 670). A két szám különbsége 30.

A feladat átlagos eredményessége 39,1% volt, amit a jelentés készítői nehéznek tartottak.

A 2010-ben használt feladatok esetében mérték átalakítást kellett végezni, törttel való szorzást, egyenes arányosságot kellett alkalmazni és hatványt hatványozni. A 2018-asban racionális számokat (törtet, egy vegyes számot és egy tizedes törtet) összevonni, és kerekíteni. Az arányosság alkalmazását ezek közül magasabb szintűnek gondoljuk.

Vizsgáljuk meg a zárt feladatokat is:

2010 zárt, feleletválasztós feladatai:

- A $\left(\frac{3}{4} + \frac{7}{8}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)$ feladat megoldása:

  A $1\frac{1}{12}$

  B $\frac{5}{6}$

  C $\frac{11}{24}$

  D $4\frac{1}{3}$

- János édesapja 2009. január 2-án 3 000 €-t tett a betétkönyvre. A takarékpénztár az 5 000 € alatti betétekre évi 0,30%-os kamatot nyújt. János édesapja azonban nyolc hónap elteltével kivette a pénzét a betétkönyvről.
  Hány eurónyi kamatot számoltak hozzá a pénzéhez?

  A 6 €

  B 9 €

  C 10 €

  D 15 €

2018 zárt, feleletválasztós feladatai:

- Számítsd ki!

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$$

A $0,\overline{8}$

B $0,\overline{7}$

C $0,\overline{5}$

D $0,\overline{4}$

- Válaszd ki a legnagyobb hatványt!

A 5^2

B 4^3

C 3^4

D 2^5

A **2010**-ben használt teszt első feleletválasztós feladatában célszerűbb stratégia volt a zárójelben lévő törtek összevonása, mint a többtagú kifejezések szorzására vonatkozó szabály alkalmazása. Az összevonásokat közös nevezőre hozással $\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{8}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2\cdot3+7}{8}\cdot\frac{3\cdot1-2}{3}=\frac{13}{8}\cdot\frac{2}{3}=\frac{13}{12}$ kapunk. Ennek vegyes szám alakja az A megoldás.

A második feladatban volt olyan adat, amit nem kellett használni (a dátum illetve az 5 000 €). 3 000 € éves 0,3%-os kamatja 9 €. Feltételezve, hogy az arányos részt fizetik ki, ennek $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ részét kell vennünk, ami 6 €(A válaszlehetőség).

A **2018**-ban használt teszt első feleletválasztós feladatában törtekkel való műveleteket kell végrehajtani. Amit tudni kell hozzá, az egyrészt az, hogy előbb a szorzást kell elvégezni, majd az összeadásokat $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}=\frac{3\cdot1+1+3\cdot1}{9}=\frac{3+1+3}{9}=\frac{7}{9}$. A válaszlehetőségek tizedes tört alakban vannak, tehát a tört jelölt osztását kell elvégezni, ami a tanuló számológéppel is elvégezhetett és így is megkaphatta a $0,\overline{7}$ értéket (B válaszlehetőség).

A feladat átlagos eredményessége 67,3% volt, amit a jelentés készítői könnyűnek tartottak.

A második feladatban a meghatározás félrevezető lehetett, hiszen nyilván a legnagyobb *értékű* hatványt kérték megkeresni. A hatványozás fogalmának ismeretében el kellett végezni a hatványozásokat: $5^2=5\cdot5=25$, $4^3=4\cdot4\cdot4=64$, $3^4=3\cdot3\cdot3\cdot3=81$ és $2^5=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=32$. A négy érték közül 81 a legnagyobb érték tehát a C válaszlehetőség a helyes válasz.

A feladat átlagos eredményessége 85,7 % volt, amit a jelentés készítői könnyűnek tartottak.

A 2010-ben használt feladatok esetében törtekkel való műveleteket (összevonást, szorzás), majd ennek vegyes számmá való átalakítását kellett végezni, ki kellett válogatni a szükséges adatokat, éves kamatot kellett számítani és egyenes arányosságot kellett alkalmazni. A 2018-asban racionális számokat (törtet) kellett szorozni, összevonni, és tizedes törtté alakítani, valamint hatványozásokat végrehajtani és kiválasztani a legnagyobbat.

Összehasonlítás

A 2010-ben használt feladatok esetében mértékegység átalakításokat kellett végezni, ki kellett válogatni a szükséges adatokat, törtekkel való műveleteket (összevonást, szorzás), majd ennek vegyes számmá való átalakítását kellett végezni, törttel való szorzást, éves kamatot kellett számítani, egyenes arányosságot kellett alkalmazni és hatványt hatványozni.

A 2018-asban racionális számokat (törtet, egy vegyes számot és egy tizedes törtet) kellett szorozni, összevonni, törtet tizedes törtté alakítani, egész számot százasokra és tízesekre kerekíteni, valamint hatványozásokat végrehajtani és kiválasztani a legnagyobbat.

Ahogyan az látható, 2010-ben több területből származó ismeretet kellett a tanulóknak tudniuk, több ismeret összekapcsolását kellett végrehajtaniuk (pl. százalékszámítás és egyenes arányosság) egy feladaton belül, így azok komplexitása nagyobb volt (a 6 feladatból 4 ilyen volt, míg 2018-ban csak 2 a 4-ből). A szöveges feladatok kontextusa 2010-ben valós problémákra koncentrált, míg a 2018-asok inkább matematikai kontextusú alkalmazási feladatokat tartalmaznak (számítsd ki).

Habár egy feladat nehézségét mérni és meghatározni ilyen módon meglehetősen nehéz, de mindezeket összevetve objektíven megállapíthatjuk, hogy a 2010-ben alkalmazott tesztfeladatok nehezebbeknek, komplexebbeknek tekinthetőek, mint a 2018-ban használtak.

Algebra témakör
2010-ben 3 nyílt, eredménymegadós és 3 zárt, eredményválasztós feladat volt.
2018-ban 2 nyílt, eredménymegadós és 3 zárt, eredményválasztós feladat volt.

Első körben vizsgáljuk meg a nyílt feladattípus feladatait.

2010 nyílt, eredménymegadós feladatai:

- Határozd meg azt az x számot, mely a $4(x - 8) = 28$ egyenlet megoldása?
- Bori a vásárlás során háromszor drágább iskolatáskát választott, mint tornatáskát. Ha az iskolatáska 30 euróval olcsóbb lenne, ugyanannyiba kerülne, mint a tornatáska. Hány euróba került az iskolatáska?
- Az autó átlagos üzemanyag-fogyasztása 100 kilométerenként 6,5 liter. Átlagfogyasztás mellett hány kilométer megtételére elegendő a tele tartály, melynek térfogata 52 liter?

2018 nyílt, eredménymegadós feladatai:

- Az étterem ebédidőben teljesen foglalt volt. Amíg az étteremben csak három pincér szolgált fel, a ebédmenüre átlagosan 45 percet vártak. Átlagosan hány percet fognak a vendégek várni, ha a három felszolgálóhoz még két ugyanolyan gyors pincér csatlakozik.
- Az aquaparkban különböző medencék vannak: egy örvénymedence, egy úszómedence és két gyerekmedence. Az örvénymedencében 15 percig ajánlatos tartózkodni, és legfeljebb 4 személy lehet bene. Az úszómedence és a gyerekmedence téglatest alakúak, és méreteiket a táblázatban tüntettük fel.

A medence méretei	Hosszúság (m)	Szélesség (m)	Mélység (m)
úszómedence	25	14,5	1,8
beltéri gyerekmedence	5	8	0,6
külső gyerekmedence	9	8,5	0,4

  Legfeljebb hány személy cserélődhet ki 2 óra alatt az örvénymedencében, ha a megengedett személyek számát és az ajánlott tartózkodási időt is betartják.

A **2010**-es teszt első algebrai feladata egy egyszerű lineáris egyenlet, minek mindkét oldalát 4-gyel osztva, majd mindkét oldalhoz 8-at hozzáadva megkaphatjuk az eredményt (15).

A második egy szöveges feladat egyenletként vagy egyenletrendszerként is megoldhatunk. Ha az iskolatáska árát x-el jelöljük, akkor a tornatáska ára $\frac{x}{3}$. A második mondat matematikai átirata $x - 30 = \frac{x}{3}$ egyenlet. Az egyenletet 3-mal szorozva és rendezve, majd kettővel osztva kaphatjuk meg a megoldást (45 euro).

A harmadik feladat egyértelműen az egyenes arányosság alkalmazásáról szól (ezért is volt nehézségünk a feladatok témakör szerinti elosztásakor):

$$\begin{array}{crcrc} \downarrow & 100\text{ km} & \dots\dots\dots\dots & 6{,}5\text{ liter} & \\ & x\text{ km} & \dots\dots\dots\dots & 52\text{ liter} & \downarrow \\ \hline \end{array}$$

$$x = \frac{52 \cdot 100}{6,5}$$

$$x = 800\text{ km}.$$

A **2018**-as első algebrai feladatban fordított arányosságot kellett használni (logikus, hogy több felszolgáló hamarabb végez). A harmadik feladat egyértelműen az egyenes arányosság alkalmazásáról szól:

$$\begin{array}{l}\downarrow \begin{array}{lcr} \text{3 pincér} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{45 perc} \\ \text{5 pincér} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & x \text{ perc} \end{array} \uparrow \\ \hline \end{array}$$

$$x = \frac{45 \cdot 3}{5}$$

$$x = 27 \text{ perc.}$$

A feladat átlagos eredményessége 59,7% volt, amit a jelentés készítői közepes nehézségűnek tartottak.

A másik feladatban negyed óra (15 perc) az örvénymedence ajánlott használati időszaka. Ha ezt betartják két óra alatt nyolc különböző négyes ül benne, azaz 32 fő.

A feladat átlagos eredményessége 76,7% volt, amit a jelentés készítői könnyűnek tartottak.

Vizsgáljuk meg a zárt feladatokat is:

2010 zárt, feleletválasztós feladatai:

- Az $\dfrac{(x+2)^2}{x^2-4} \cdot \dfrac{(x-2)^2}{x+2}$ törtkifejezés értéke, ahol $x \neq \pm 2$, egyenlő:

  A $\dfrac{x-2}{x+2}$

  B $x-2$

  C $x+2$

  D $\dfrac{x+2}{x-2}$

- Az elektromos ellenállás kiszámítására szolgáló képletből, $R = \dfrac{\rho \cdot l}{S}$, fejezzétek ki ρ-t.

  A $\rho = R \cdot l \cdot S$

  B $\rho = \dfrac{R \cdot l}{S}$

  C $\rho = \dfrac{S \cdot l}{R}$

  D $\rho = \dfrac{R \cdot S}{l}$

- Trencsén Pozsonytól 120 km távolságra van. A Trencsénből Pozsony felé haladó kerékpáros átlagsebessége 20 km/h.
  Számítsátok ki annak a személyautónak az átlagsebességét, mely a kerékpárossal egyidőben Pozsonyból indulva haladt a kerékpárossal szembe, és 90 percen belül találkoztak!

  A 90 km/h

  B 60 km/h

  C 45 km/h

  D 30 km/h

2018 zárt, feleletválasztós feladatai:

- Három diák, Iván, Lea és Diána az elvégzett munkáért 480 €-t kapott. Iván megkapta az összes pénz egyharmadát. A maradék pénzen Lea és Diána osztozott meg, 3:1 arányban. Hány eurót kapott Lea?

  A 240 €

B 120 €

C 320 €

D 80 €

- Az egyenlet bal oldalán az $x - 2,4$ kifejezés áll. Állapítsd meg, hogy a kifejezések közül melyik tartozik az egyenlet jobb oldalára, ha az egyenlet gyöke $x = 2,8$!

  A $3 \cdot (x - 1,1)$

  B $2 \cdot (3 - x)$

  C $3 \cdot (x + 1,1)$

  D $2 \cdot (3 + x)$

- A Varga házaspár úgy döntött, hogy lakást vásárol. Az ingatlanirodában 4 szabad lakást ajánlottak nekik. Az egyes lakások adatait táblázatba foglaltuk.

Megjelölés	Méret	A lakás állapota	Szobák száma	A lakás ára
1. lakás	70 m^2	új építésű	3	65 000 €
2. lakás	56 m^2	eredeti állapotú	2	32 000 €
3. lakás	42 m^2	eredeti állapotú	2	26 000 €
4. lakás	65 m^2	új építésű	2	47 000 €

  Végül is eredeti állapotú kétszobás lakás mellett döntöttek. A nagyobb méretűt választották ki. 17 000 € spórolt pénzük van, a vételár maradék részét a banktól kölcsönzik. A kölcsönt 15 éven keresztül, havonta 120 euróval fogják törleszteni. Hány euróval többet fizetnek vissza a banknak a kölcsönzött összegnél?

  A 4 600 €-val

  B 5 400 €-val

  C 6 200 €-val

  D 6 600 €-val

A **2010**-es teszt első zárt algebrai kérdése egy algebrai törtkifejezés egyszerűsítésére vonatkozott. Ha az első tört nevezőjében szereplő $x^2 - 4$ kifejezést a $(x - 2)(x + 2)$ szorzattá alakítjuk, maris látjuk, hogy mivel lehetséges egyszerűsíteni, és hogy a kifejezés $x - 2$-vel egyenlő (B válaszlehetőség).

A másodikban egy képletből kellet kifejeznünk az egyik ismeretlent. Egyenletként oldva először szorozzuk be S-sel majd osszuk el l-lel az egyenlet minkét oldalát, így a D válaszlehetőséget találjuk helyesnek.

A harmadik feladat mozgással kapcsolatos. A 90 perc másfél óra. Ez idő alatt a kerékpáros nyilván 30 km-t tesz meg a 120-ból. A megmaradt 90 km-t az autó másfél óra alatt 60 km/h átlagsebesség mellett teszi meg (B válaszlehetőség). A tanulók valószínűleg ettől hosszabb, az ilyen típusú feladatokra jellemző módon, egyenlettel oldották.

A **2018**-as tesztben az első zárt algebrai feladatban adott arányban kellett pénzt elosztani. Iván a 480 € egy harmadát, azaz 160 €-t kapott. A maradék 320 €-n osztozott meg a két lány 3:1-hez arányban. Ez azt jelenti, hogy a 320 € $\frac{3}{4}$-ét Lea, $\frac{1}{4}$-ét Diána kapta. $320 \cdot \frac{3}{4} = 240$ (A válaszlehetőség).

A feladat átlagos eredményessége 67,5% volt, amit a jelentés készítői könnyűnek tartottak.

A másodikban egy egyenlet jobb oldalát kerestük. Ha az egyenlet gyöke $x = 2,8$, akkor az egyenlet bal oldalának helyettesítési értéke $x - 2,4 = 2,8 - 2,4 = 0,4$. Ezzel egyezőnek kell lennie az egyenlet jobb oldalának helyettesítési értékének is. A megadott négy válaszlehetőség közül csak a B helyettesítési értéke $0,4$. Nyilván megoldható lett volna a feladat 4 darab egyenlet felírásával és megoldásával is, csak feleslegesen időigényes és sok hibázási lehetőséget tartogatott volna.

A feladat átlagos eredményessége 58,6% volt, amit a jelentés készítői közepes nehézségűnek tartottak.

Az utolsó feladatban a táblázatból kellet kiolvasnunk, hogy a Varga házaspár a 2. lakást vásárolta meg. $32\ 000 - 17\ 000 = 15\ 000$ € kölcsönt vettek fel a bankból. A kölcsönt 15 évig havonta 120 €-val törlesztik, azaz $15 \cdot 12 \cdot 120 = 21\ 600$ €-t fizetnek ki. Ezek alapján $21\ 600 - 15\ 000 = 6\ 600$ €-val fizetnek többet a banknak (D válaszlehetőség).

A feladat átlagos eredményessége 55,5% volt, amit a jelentés készítői közepes nehézségűnek tartottak.

Összehasonlítás

A 2010-ben használt feladatok esetében egyenletet kellett megoldani, szöveges feladatokból egyenletet felírni és megoldani, egyenes arányosságot kellett alkalmazni, algebrai kifejezést egyszerűsíteni, képletből kifejezni egy ismeretlent és mozgásra vonatkozó szöveges feladatot megoldani.

A 2018-asban egyenes és fordított arányosságot kellett alkalmazni, arányosan elosztani egy pénzösszeget, egy egyenlet jobb oldalát kiválasztani (helyettesítéssel) és aritmetikai műveletekkel kiszámítani mennyivel drágább a kölcsön.

Ahogyan az látható, 2010-ben több algebrai területről származó, absztraktabb ismeretet kellett a tanulóknak tudniuk, több szöveges feladat matematikai átiratát (egyenlet) kellett felírniuk és végrehajtaniuk, így azok komplexitása nagyobb volt. A 2018-as feladatok az arányosság alkalmazására koncentráltak, a fordított arányosság alkalmazása e tekintetben nehezebb volt, de az absztrakt algebra elemei (kifejezések) csak alig lelhetőek föl benne. Az egyenes arányosságra vonatkozó feladatok viszont kevésbé voltak igényesek, csak a szövegkörnyezetből kellett az adatokat kiválogatni több esetben.

Habár egy feladat nehézségét mérni és meghatározni ilyen módon meglehetősen nehéz, de mindezeket összevetve objektíven megállapíthatjuk, hogy a 2010-ben alkalmazott tesztfeladatok nem tekinthetőek kevésbé nehéznek, mint a 2018-ban használtak.

Geometria témakör

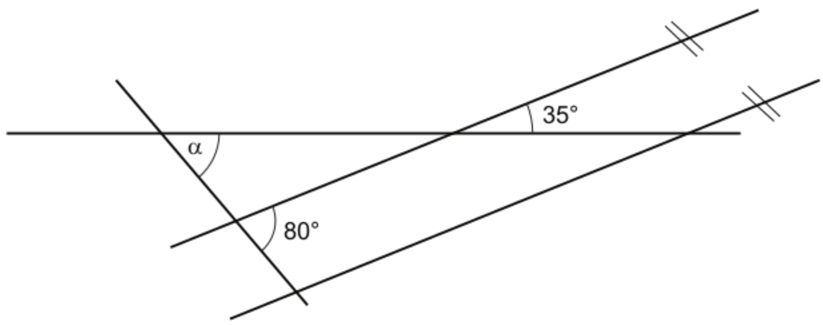
2010-ben 2 nyílt, eredménymegadós és 4 zárt, eredményválasztós feladat volt.

2018-ban 4 nyílt, eredménymegadós és 1 zárt, eredményválasztós feladat volt.

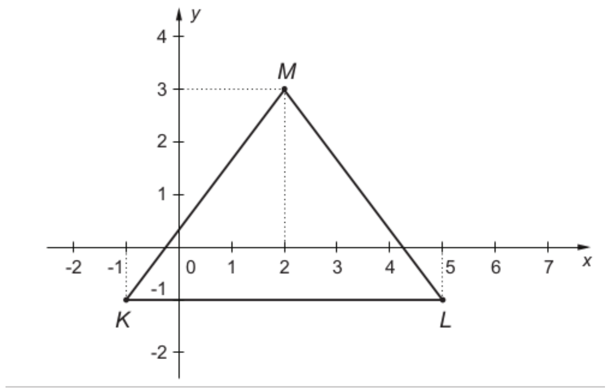
Első körben vizsgáljuk meg a nyílt feladattípus feladatait.

2010 nyílt, eredménymegadós feladatai:

- Számítsátok ki fokokban az α szög nagyságát.

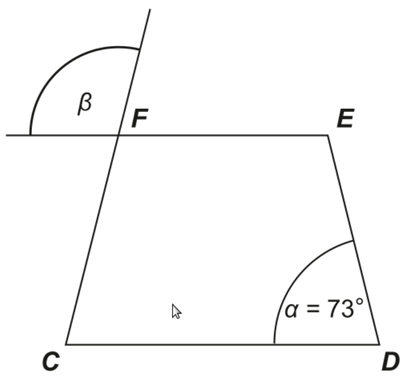


- A KLM háromszöget a derékszögű koordinátarendszerben ábrázoltuk.
  Hány egység hosszúságú azon magasság, mely szerint a KLM háromszög tengelyesen szimmetrikus?



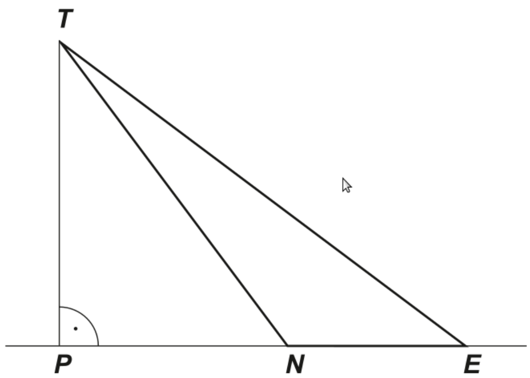
2018 nyílt, eredménymegadós feladatai:

- Az ábrán egy egyenlő szárú $CDEF$ trapéz látható. Az α szög nagysága 73°. Számítsd ki fokokban a β szög nagyságát!



- A $JKLM$ négyzet oldalainak hossza 24 cm. Az S pont az LM oldal középpontja. Számítsd ki a $JKSM$ négyszög területét cm^2-ben!

- Az ábrán egy NET háromszög látható. A P pont a háromszög T csúcsából a NE oldalára bocsátott magasságának a talppontja; az N pont a PE szakasz pontja.
  Tudjuk, hogy:
  $|PE| = 16\ cm$,
  $|TP| = 12\ cm$,
  $|TE| = 20\ cm$,
  $|NE| = 7\ cm$.



Határozd meg a NET háromszög kerületét cm-ben!

- Az aquaparkban különböző medencék vannak: egy örvénymedence, egy úszómedence és két gyerekmedence. Az örvénymedencében 15 percig ajánlatos tartózkodni, és legfeljebb 4 személy lehet bene. Az úszómedence és a gyerekmedence téglatest alakúak, és méreteiket a táblázatban tüntettük fel.

A medence méretei	Hosszúság (m)	Szélesség (m)	Mélység (m)
úszómedence	25	14,5	1,8
beltéri gyerekmedence	5	8	0,6
külső gyerekmedence	9	8,5	0,4

A beltéri gyerekmedence megtöltésekor üzemzavar miatt pontosan akkor kapcsolták ki a vízellátást, amikor a medencében $15,6\ m^3$ víz volt. A medence egész térfogatának hány százaléka volt megtöltve vízzel a vízellátás kikapcsolásakor?

A **2010**-es teszt első geometria feladata a szögpárok (csúcsszög, mellékszög) és háromszög belső szögösszegének használatával számítható ki. Az ábrán látható háromszög belső szögei α, $100°$ (a $80°$ mellékszöge) és $35°$ (a $35°$ csúcsszöge). Mivel a háromszög szögösszege $180°$, ezért az α szög nagysága $45°$.

A másik feladatban a koordináta-rendszerben ábrázolt ábra alapján meg kell állapítani az oldalak hosszát. $|KL| = 6$, $|KM|$ és $|LM|$ pedig a pitagoraszi számhármasok (3,4,5) miatt az itt felvehető derékszögű háromszögek átfogója, azaz 5. A KLM tehát egyenlő szárú háromszög KL alappal. Tehát a szimmetriatengelye a KL felezőmerőlegese, amire illeszkedik a KL magassága. Ennek hossza 4 $(3 + 1)$, ahogy az ábráról leolvashatjuk.

A **2018**-as teszt első geometriai feladata az egyenlő szárú trapéz vagy annak szögeinek tulajdonságai és a szögpárok (csúcsszögek, vagy váltószögek) segítségével számíthatóak ki. Az egyenlő szárú trapéz egyes alapjain fekvő szögeinek nagysága megegyezik, azaz a trapéz C csúcsnál lévő belső szög ugyanúgy $\alpha = 73°$, mint a D csúcsnál lévő. A C csúcsnál lévő külső szög váltószög-párja a keresett β-nak, amiből azt kapjuk, hogy $\alpha + \beta = 180°$, vagyis $\beta = 107°$.

A feladat átlagos eredményessége 58,6% volt, amit a jelentés készítői közepes nehézségűnek tartottak.

A második feladatban vagy a $JKLM$ négyzet területéből $(24 \cdot 24 = 576\ cm^2)$ vonjuk ki a KLS háromszög területét $(\frac{24 \cdot 12}{2} = 144\ cm^2)$, vagy a $JKSM$ trapéz területét számítjuk ki: $\frac{24 \cdot (24+12)}{2} = 12 \cdot 36 = 432\ cm^2$.

A feladat átlagos eredményessége 35,8% volt, amit a jelentés készítői nehéznek tartottak.

A harmadik feladatban a háromszög kerületéhez az oldalak hosszára van szükség. A $|TE| = 20\ cm$ és $|NE| = 7\ cm$ oldalak hosszát ismerjük, tehát a TN oldal hosszára van még szükségünk. A PNT derékszögű háromszög PT befogójának hossza $12\ cm$, a másikról az ábra alapján $|PN| = |PE| - |NE| = 16 - 7 = 9\ cm$. A Pitagorasz tétel alkalmazásával a TN átfogó hossza $\sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15\ cm$. A NET háromszög kerülete $20 + 7 + 15 = 42\ cm$.

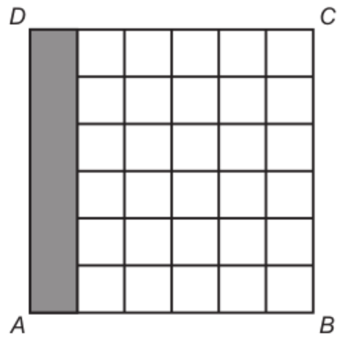
A feladat átlagos eredményessége 39,2% volt, amit a jelentés készítői nehéznek tartottak.

A negyedik feladatban a beltéri gyerekmedence térfogata $5 \cdot 8 \cdot 0,6 = 24\ m^3$. Egyenes arányosság alkalmazásával $(\frac{15,6 \cdot 100}{24})$ 65%-ot kapunk.

A feladat átlagos eredményessége 52,2% volt, amit a jelentés készítői közepes nehézségűnek tartottak.

2010 zárt, feleletválasztós feladatai:

- Az ábrán látható $ABCD$ négyzet apró négyzetekből áll. Néhányat közülük befestettek. Hány kis négyzetet kell még befesteni ahhoz, hogy az $ABCD$ négyzet területének egy negyede befestetlen maradjon?



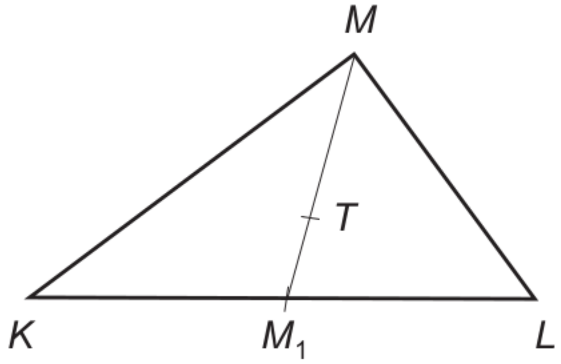
A 3

B 9

C 21

D 27

- Az ábrán a KLM háromszög látható. A T pont a súlypontját jelzi. A T és M pontok egymástól való távolsága $4,5\ cm$. Hány centiméter hosszú az MM_1 súlyvonal?



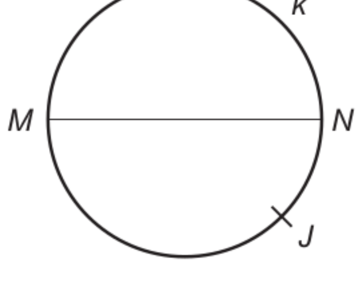
A 9,00

B 6,75

C 6,00

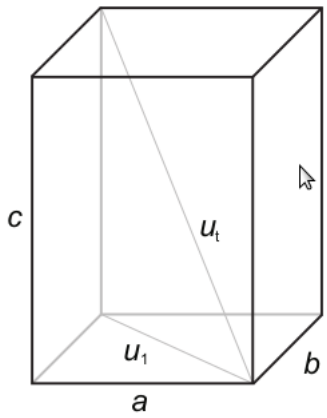
D 2,25

- Az ábrán az MN átmérőjű k körvonal látható, melyre illeszkedik a J pont. A JN szakasz hossza $12\ cm$, a körvonal MN átmérője $20\ cm$ hosszú.
Hány centiméter hosszú a JM szakasz?



A 8,0
B 15,6
C 16,0
D 23,3

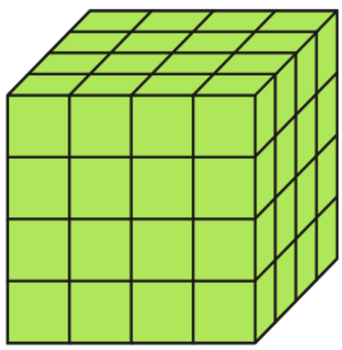
- A téglatest alaplapjának egyik éle $a = 3\ cm$. A testátló hossza $u_t = 13\ cm$, a téglatest alapjának lapátlója $u_1 = 5\ cm$.
  Mennyi a téglatest térfogata?



A $144{,}0\ cm^3$
B $152{,}4\ cm^3$
C $195{,}0\ cm^3$
D $231{,}4\ cm^3$

2018 zárt, feleletválasztós feladata:

- Egy 4 cm élű fakocka egész felületét zöld színűre festettünk. Azután szétvágtuk 1 cm élű kis kockákra. A csak két oldalukon zöldre festett kockák száma:



A 8
B 12
C 16
D 24

A **2010**-es teszt első zárt geometriai kérdését igazából nem is tekinthetjük geometriainak, hiszen számolni kell csak rajta. Az $ABCD$ négyzet 6-szor 6-os, tehát 36 kis négyzetből áll. Ha azt akarjuk, hogy a negyede befestetlen maradjon, akkor 9 négyzetnek kell befestetlennek lennie, és így 27-nek kell befestettnek lennie. Ebből 6 már be van festve, hát további 21-et kell még befesteni (C válaszlehetőség).

A második feladat a háromszög súlyvonalaival kapcsolatos ismereteket kérte számon, miszerint a súlypont a súlyvonalakat 2 : 1-hez arányban osztja, a nagyobbik rész a súlypont és a csúcs távolsága. Ezért, ha a $|TM| = 4,5\ cm$, akkor a $|TM_1| = \frac{4,5}{2} = 2,25\ cm$. Így a súlyvonal hossza $6,75\ cm$ (B válaszlehetőség).

A harmadik feladatban azt kellett észrevenni, hogy az MN átmérőjű kör tk. egy mértani hely – Thalész-kör. Az MNJ háromszög derékszögű MN átfogóval. Az NJ befogó ismeretében Pitagorasz tételének alkalmazásával $|JM| = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{400 - 144} = \sqrt{256} = 16\ cm$ (a C válaszlehetőség).

A negyedik feladatban a térfogat kiszámításához a téglatest oldaléleit kell meghatározni. A b alapélt a Pitagorasz tétel segítségével mint befogót számíthatjuk ki abból az alaplap derékszögű háromszögéből, aminek másik befogója az a oldalél, az átfogó u_1 lapátló. $b = \sqrt{u_1^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4\ cm$. A c oldalélt a Pitagorasz tétel segítségével mint befogót számíthatjuk ki abból az derékszögű háromszögéből, aminek másik befogója az u_1 lapátló, az átfogó u_t testátló. $b = \sqrt{u_t^2 - u_1^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12\ cm$. A téglatest térfogata $a \cdot b \cdot c = 3 \cdot 4 \cdot 12 = 144\ cm^3$ (A válaszlehetőség).

A **2018**-es teszt zárt geometria feladata a térszemlélet kiaknázásáról szólna. A csak két oldalán zöldre festett kis kockák a nagy kocka élein vannak mindegyiken 2. A (nagy) kockának 12 ilyen éle van, tehát 24 ilyen kis kocka van (B válaszlehetőség).

A feladat átlagos eredményessége 46,1% volt, amit a jelentés készítői közepes nehézségűnek tartottak.

Összehasonlítás

A 2010-ben használt feladatok esetében a szögpárok (csúcsszög, mellékszög) és a háromszög szögösszegére vonatkozó összefüggést, a koordináta-rendszer tulajdonágait, Pitagorasz tételét kellett tudni alkalmazni, négyzetekből álló alakzat területét kellett tudni kiszámítani, a súlypont és a súlyvonalra vonatkozó ismereteket, a körre és részeire vonatkozó ismereteket és Thalész tételét kellett összekapcsolni, majd Pitagorasz tételt alkalmazni, egy alapél, egy lap és a testátló ismeretében kellett egy téglatest éleit, majd a térfogatát kiszámítani.

A 2018-asban szögpárok (csúcsszögek, vagy váltószögek) tulajdonságait, négyzet és háromszög területét kellett tudni kiszámítani, Pitagorasz tételét alkalmazni és a háromszög kerületét, téglatest térfogatát (és százalékot) kellett tudni kiszámolni, egy kisebb kockákra osztott lefestet kockán kellett meghatározni a két lefestett lappal rendelkező kis kockák számát. A nyílt feladatok számítási jellegűek voltak.

Ahogyan az látható, 2010-ben több ismeret összekapcsolását várták el geometriából: az első nyílt feladatban a csúcs- és mellékszög valamint a háromszög szögösszege között kellet összefüggést találni, a másodikban a koordináta-rendszerben kellett tudni tájékozódni, ezt összekapcsolni a tengelyes szimmetria, és az egyenlő oldalú háromszög tulajdonságaival. A zárt feladatok megoldásához ismerni kellett, hogy a súlypont milyen arányban osztja a súlyvonalat, észre kellett venni egy körben Thalész tételét, területet és térfogatot kellett számítani, tájékozódni egy téglatest fogalmai között és háromszor kellett alkalmazni Pitagorasz tételét. A 2018-as nyílt feladatok közül az elsőben kellett geometriai összefüggést az egyenlő szárú trapéz és a váltószögek közt észrevenni, a többi mind kerület, terület és térfogat számítására koncentrált és csak egyszer kellett alkalmazni Pitagorasz tételét. A zárt feladatról viszont el kell ismernünk, hogy az egy jó, érdekes, térszemléletre vonatkozó feladat, ami viszont a tesztelés eredményei alapján is közepes nehézségűnek számított.

Habár egy feladat nehézségét mérni és meghatározni ilyen módon meglehetősen nehéz, de ezeket összevetve objektíven megállapíthatjuk, hogy a geometria témakörben 2018-ban alkalmazott tesztfeladatok globálisan nem tekinthetőek igényesebbnek, mint a 2010-ben használtak.

Kombinatorika, valószínűségszámítás és statisztika (valamint logika) témakör
2010-ben 1 nyílt, eredménymegadós és 1 zárt, eredményválasztós feladat volt.
2018-ban 2 nyílt, eredménymegadós és 4 zárt, eredményválasztós feladat volt.

Első körben vizsgáljuk meg a nyílt feladattípus feladatait.

2010 nyílt, eredménymegadós feladata:

- Az első évfolyam diákjait a testnevelési órán megmérték. Az osztályfőnök a testtömegük adatait táblázatba foglalta.
  Az első évfolyam diákjainak hány százalékánál kevesebb a testtömeg 21 kilogrammnál?

1. évfolyam diákjai	**Testtömeg kilogrammokban**					
	19,5	20	20,5	21,5	23	23,5
Fiúk	1	4	5	4	1	2
Lányok	4	5	2	3	1	3

2018 nyílt, eredménymegadós feladatai:

- A táblázatban Peter Sagan kerékpárosnak a 2016-os Tour de France egyes szakaszversenyein elért helyezéseit tüntettük fel. Összesen 21 szakaszverseny volt.

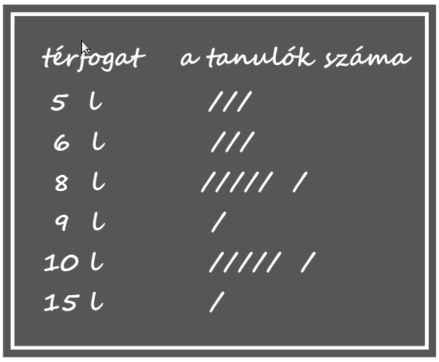
  Az összes szakaszverseny hány százalékát teszik ki azok a szakaszversenyek, amelyeken dobogós 1–3. helyezést ért el? Az eredményt kerekítsd egész számra!

Forrás: www.procyclingstats.com

- A fizikaórán a tanulók az osztályban lévő szemétkosár térfogatát határozták meg becsléssel. A táblán 20 tanuló válaszának feljegyzése látható. A szemétkosár valódi térfogata 12 liter volt.

  Hány literrel tér el ettől az értéktől a tanulók által becsléssel meghatározott térfogatok átlaga?

A **2010**-es feladat egy táblázatból származó adatok feldolgozásáról szólt. Ahogy kiolvashatjuk összesen 17 fiú és 18 lány, tehát 35 tanulója van az osztálynak. 10 fiú és 11 lány, tehát 21 tanuló testtömege kevesebb 21 kg-nál. A keresett százalékarány $\frac{21}{35} = 0,6 = 60\%$.



A **2018**-as első kombinatorika, valószínűségszámítás és statisztika témakörbe eső feladat egy diagram (a feladatban táblázat szerepel - véleményünk szerint helytelenül) értelmezéséről szól. Ahogyan az a diagramból leolvasható, Peter Sagan 8 alkalommal lett a szakaszverseny dobogósa (végzett az első három hely valamelyikén). A keresett százalékarány $\frac{8}{21} \doteq 0,3809 = 38,09\%$. Ez egész százalékra kerekítve 38%.

A feladat átlagos eredményessége 56,9% volt, amit a jelentés készítői közepes nehézségűnek minősítettek.

A második feladatban átlagot kellett számítani: $\frac{3 \cdot 5+3 \cdot 6+6 \cdot 8+1 \cdot 9+6 \cdot 10+1 \cdot 15}{20} = 8,25\ l$, ami a valódi térfogattól $12 - 8,25 = 3,75\ l$-rel tér el.

A feladat átlagos eredményessége 36,0% volt, amit a jelentés készítői nehéznek minősítettek.

2010 zárt, feleletválasztós feladata:

- Hány különböző kétjegyű számot képezhetünk az 1, 3, 5, 7 számjegyek segítségével, ha a számokban a számjegyek ismétlődhetnek is:

  A 18

  B 16

  C 14

  D 12

2018 zárt, feleletválasztós feladatai:

- Zsuzsa mobiltelefonjában 5 mappa van, különböző zenei stílusokkal. A táblázatban feltüntettük a megnevezésüket és a bennük lévő zeneművek számát. Pótold a táblázatban hiányzó számot úgy, hogy a véletlenszerű lejátszás módjának használatakor elsőként rockzenei szám szóljon 21%-os valószínűséggel!

Zenei stílus	A zeneművek száma
hip hop	52
jazz	11
disco	79
rock	?
komolyzene	16

  A 21

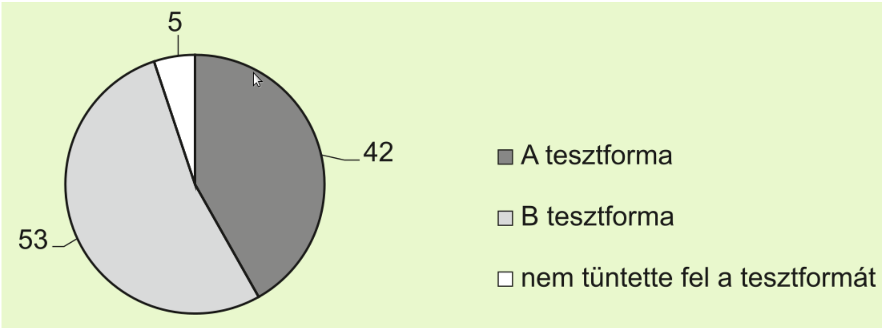
  B 32

  C 36

  D 42

- A belépő tesztet kémiából A vagy B formában összesen 100 tanuló oldotta meg. A válaszadó lapon mindenkinek fel kellett tüntetnie, melyik tesztformán dolgozott. Öt tanuló nem tüntette fel. Az ábrán látható kördiagramon a tesztelésben résztvevők tanulók megoszlását ábrázoltuk aszerint, melyik tesztformát tüntette fel.

  A tesztelésben résztvevő tanulók mintájának elemzésekor két állítás fogalmazódott meg:

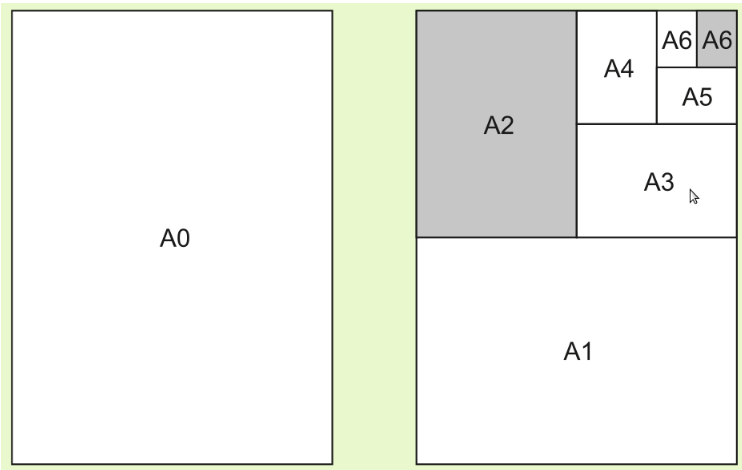
  

  1. Lehetséges, hogy az A formán 6-tal kevesebb tanuló dolgozott, mint a B formán.
  2. Lehetséges, hogy a B formán 11-gyel több tanuló dolgozott, mint az A formán.

  Döntsd el, igaz-e ez a két állítás, és válaszd ki a helyes lehetőséget!

  A Csak az első állítás igaz.
  B Csak a második állítás igaz.
  C Mindkét állítás igaz.
  D Mindkét állítás hamis.

- A leggyakrabban előforduló papírformátumok jelölése betűből és egy számjegyből áll, pl. A4. Az A sorozat alapformátuma az A0. Ennek a sorozatnak a további formátumai (A1, A2, A3, ...) úgy keletkeznek, hogy a papírlapot a hosszabbik oldalra merőlegesen fokozatosan kettévágjuk. Összesen hány A6 formátumú darabra vághatjuk szét az A2

  formátumú papírt?

  A 8
  B 16
  C 32
  D 64

- A Varga házaspár úgy döntött, hogy lakást vásárol. Az ingatlanirodában 4 szabad lakást ajánlottak nekik. Az egyes lakások adatait táblázatba foglaltuk.

Megjelölés	Méret	A lakás állapota	Szobák száma	A lakás ára
1. lakás	70 m^2	új építésű	3	65 000 €
2. lakás	56 m^2	eredeti állapotú	2	32 000 €
3. lakás	42 m^2	eredeti állapotú	2	26 000 €
4. lakás	65 m^2	új építésű	2	47 000 €

Varga asszony a 2. lakást ajánlotta, mert szerinte az összes felkínált lakás közül ennek a legalacsonyabb az 1 m^2-re eső ára. Varga úr a 3. lakást ajánlotta, mert az a legolcsóbb. Közülük ki indokolta meg helyesen az ajánlatát?

A Csak Varga asszony.

B Csak Varga úr.

C Mindketten.

D Egyikük sem.

A **2010**-es feladat kombinatorikai. A tízesek helyére 4 számjegyből választhatunk, ahogyan az egyesek helyére is. Tehát összesen $4 \cdot 4 = 16$ ilyen négyjegyű számot tudunk képezni.

A **2018**-as első feladata valószínűségszámításról szól, ami a valójában a valószínűség alapfogalmának (kedvező lehetőségek száma / összes lehetőség száma) ismeretét használja csak. Rock zene nélkül 156 zeneszám van a mobiltelefonon. Ha 42 rock zeneszám (D válaszlehetőség) van a mobiltelefonon, akkor összesen 200 zeneszám van, és így a kedvező és az összes zeneszám aránya 21%.

A feladat átlagos eredményessége 47,0% volt, amit a jelentés készítői közepes nehézségűnek minősítettek.

A második feladat logikai. Két logikai állítás helyességéről kellett nyilatkozni. Az A tesztváltozatot 42-en tüntették fel, a B-t 53-an és 5-en nem tüntették fel, hogy melyik változaton dolgoztak, azonban ők is valamelyik variánson dolgoztak. Nyilvánvalóan az alábbi lehetőségek jöhetnek számításba:

a fel nem tüntetők	A változat	B változat	különbség
mind A	47	53	6
4A 1B	46	54	8
3A 2B	45	55	10
2A 3B	44	56	12
1A 4b	43	57	14
mind B	42	58	16

Az első állítás tehát igaz, mert valóban lehetséges hogy az A változaton 6-tal kevesebben dolgoztak, mint a B változaton.
A második állítás viszont hamis, mert nincs olyan lehetőség, hogy a B változaton pontosan 11-el többen dolgozzanak mint az A változaton. (A válaszlehetőség)

A feladat átlagos eredményessége 36,6% volt, amit a jelentés készítői nehéznek minősítettek.

A harmadik feladatban az A2-es papírt 2 darab A3-asra vágjuk, a 2 darab A3-as papírt 4 darab A4-esre; a 4 darab A4-es papírt 8 darab A5-ösre és végezetül a 8 darab A5-ös papírt 16 darab A6-osra vágjuk szét (B válaszlehetőség).

A feladat átlagos eredményessége 70,9% volt, amit a jelentés készítői könnyűnek minősítettek.

Az utolsó, negyedik feladat szintén logikai. Varga úrnak a táblázat alapján jól láthatóan igaza van, mert a 3. lakás a legolcsóbb. Az első lakás 1 m^2-re eső ára $\frac{65\,000}{70} \doteq 928,57$ €$/m^2$, a másodiké $\frac{32\,000}{56} \doteq 571,43$ €$/m^2$, a harmadiké $\frac{26\,000}{42} \doteq 619,05$ €$/m^2$ és a negyedike $\frac{47\,000}{65} \doteq 723,08$ €$/m^2$, tehát Varga asszonynak is igaz volt az állítása (C válaszlehetőség).

A feladat átlagos eredményessége 48,9% volt, amit a jelentés készítői közepes nehézségűnek minősítettek.

Összehasonlítás

A 2010-ben használt nyílt feladat esetében egy táblázatból kellett kiolvasni, hogy mely adatok megfelelőek, majd ezt figyelembe véve összegezni és százalékos arányt kiszámítani, a zárt feladat pedig egy tipikus kombinatorikai feladat.

A 2018-asban grafikont kellett olvasni, és ebből százalékos arányt kiszámítani, valamint átlagot számítani. A zárt feladatokban is táblázat, grafikonból illetve ábra alapján kellett adatokat kiolvasni, értelmezni. A valószínűség egy feladatban fordul elő, két feladatban pedig logikai állítások helyességéről kellett meggyőződni.

A feladatok összehasonlítása itt a legnehezebb, hiszen 2018-ban lényegesen több ide sorolható feladat volt már (összhangban a vonatkozó tantervekkel) és megjelent köztük a logikai állítások igaz vagy hamis voltának eldöntése is. A 2018-as feladatok közt volt egy valószínűségszámítási, viszont nem volt kombinatorikai feladat, míg 2010-ben fordítva volt. Figyelembe vehetjük továbbá a 2018-as feladatok megoldásának átlagos eredményességeit, melyek alapján látható azok nehézsége a tanulóknál. Habár az egyes feladat nehézségét mérni és összehasonlítani ilyen módon meglehetősen nehéz, de mindezeket összevetve nem állítható, hogy a 2018-ban alkalmazott tesztfeladatok nem tekinthetőek kevésbé igényesnek, mint a 2010-ben használtak.

A tesztek nehézségének összehasonlítása

A két feladatsor feladatainak összehasonlítása alapján az aritmetika, algebra és geometria területbe besorolt feladatok nehézsége elemzésünk alapján (lásd fentebb) a 2018-ban alkalmazott tesztnél nem tekinthető igényesebbnek, mint a 2010-ben használt teszté, csak a Kombinatorika, valószínűségszámítás és statisztika valamint logika témakör esetében tűnnek a 2018-as feladatok (tekintettel azok számára is) tekinthetőek kissé nehezebbeknek. Mindezeket összevetve állíthatjuk, hogy a 2010-ben alkalmazott teszt igényessége nem volt kisebb, mint a 2018-asé. Ezért és mivel 2018-ben rosszabb átlagos eredményt értek el a tanulók, akkor ez arra utal, hogy az aktuális korosztály ténylegesen rosszabbul teljesített matematikából.

A bemutatott tesztek is alátámasztják azon korábbi állításunkat, hogy a geometria tananyag ellenőrzésekor geometriai szerkesztések nem szerepelnek a tesztfeladatok közt.

2.3.3. A középiskolákon felmért matematikai ismeretek elemzése

A középiskolákban a kötelező matematika érettségi eltörlését követően 2000-től zajlik országos szintű reprezentatív tudásszint-felmérés, ami tk. az érettségi vizsga központi írásbeli része. Az első 5 évet pilot időszakként értékelték. A felméréssorozat eredményeit (átlagos eredményességet) az alábbi (2.4.) táblázatban foglaljuk össze. Egyazon táblázatban mutatjuk be az alap és az emelt szintű eredményességet is (ameddig azt még külön mérték).

Az adatok idősorában nem fedezhető fel egyértelmű trend. A kezdeti időszakban vegyük figyelembe, hogy ez volt az első ilyen országos felméréssorozat, amelyek tapasztalataiból nyilván meríteni tudtak már a később bevezetett alapiskolai felmérések során. A nagy fluktuáció oka a kezdeti időszakban az is, hogy a pilot fázis alatt a korosztályból arányaiban többen vállalkoztak a teszt megírására, mint akik matematikából valóban érettségizni szerettek volna. Időközben változott a teszt formátuma, a megoldásra szánt idő mennyisége is a részvevőkön kívül.

A tesztelés formátuma 2009-től nem változott jelentősen (csak a megoldásra szánt időt emelték fél órával 2016-tól). Az azóta eltelt időszak során alakuló ingadozások okára nem szolgálnak indoklással.

Elgondolkodtató azonban, hogy a matematikából érettségizni kívánók aránya a korosztály népességi csökkenésével együtt csökken és az utóbbi években már a 12-13%-ot sem éri el.

A másik érdekesség, hogy változtatni kellett a vonatkozó jogi szabályozást, ami az eredményességet jelentő 33%-os határt 25%ra csökkentette 2013-ban miután az azt megelőző években a matematikát érettségi tantárgynak választó diákoknak már a 16%-a elbukta a központi írásbeli tesztet.

Az érettségik átlagos eredményessége		
Év	emelt szint (M1, A)	alap szint (M2, B)
2001	48,5%	39,2%
2002	44%	37,8%
2003	47,6%	35,8%
2004	–	–
2005	83,6%	72,7%
2006	60,4%	56,9%
2007	65,4%	58,6%
2008	60,2%	37,8%
2009	50,2%	
2010	59%	
2011	57,9%	
2012	50,8%	
2013	50,9%	
2014	54,4%	
2015	45,7%	
2016	54,3%	
2017	45,9%	
2018	57,0%	

2.4. táblázat. A matematika érettségik központi írásbeli részének átlagos eredményessége

Az adott korosztályban nemzetközi felmérés nem zajlik, így nem mérhetőek össze annak adatai az érettségi eredményességi adataival. Nem hivatalos referenciaként a felsőoktatási intézmények szolgálhatnak csak, akik benyomásaik, tapasztalataik alapján nem emelkedő matematikai tudásszintről számolnak be hallgatóik kapcsán.

Az alábbiakban a 2010-es és a 2018-a tesztek feladatait hasonlítanánk össze. Ezek formátuma elvileg megegyező, relatíve hosszabb idő eltelt a tesztek megíratása között, és közel hasonló átlagos eredményességet értek el az adott évben érettségizők. Ezért gondoltuk, hogy e két év tesztjeit vessük össze, azért is, mivel az alapiskola felső tagozatán is a 2010-es és a 2018-as évek feladatait vetettük össze.

Sajnos az egyetemi tanrendbe beilleszthetően a tesztek megíratására nem volt olyan adekvát, nagy elemű mintánk, ahol ezt értékelhető módon végre tudtuk volna hajtani. Ezért csak a használt tesztek tartalmi összehasonlítását végezzük el.

A használt tesztek összehasonló elemzése

A feladatok mindkét vizsgált esetben a lebonyolító intézet (NÚCEM) oldalán közzétett tesztekből származnak, a pontos forrás megtalálható a ("Maturita 2010, Externá časť, Matematika", 2010) valamint ("Érettségi vizsga 2018-Extern rész, Matematika", 2018) helyen. A 2018-as teszt magyar nyelven közzétett, az alábbiakban a feladatokat ezekből átvetten közöljük. A 2010-es teszt csak szlovák nyelven van közzétéve. Az alábbiakban ennek saját fordítását közöljük, tehát annak helyességéért a felelősséget a fordító (Csiba Peter, ezen dolgozat szerzője) vállalja, a NÚCEM-et nem terheli felelősség. Az ábrákat a tesztekből kimásoltan, változtatás nélkül illesztettük be. Az átírás során keletkezett esetleges hibákért, elírásért a feladatok rendszerezéséért a NÚCEM nem vállal felelősséget.

Mivel mindkét teszt egy 20 kérdéses nyílt, feleletmegadós és egy 10 kérdésből álló zárt, feleletválasztós részből áll, ezeket vetjük össze.

A **2010**-es teszt nyílt feladatai:

1. A 2010-es számot fel tudjuk írni, mint három egymást követő természetes szám összegét. Határozzuk meg ezen számok számtani közepét!

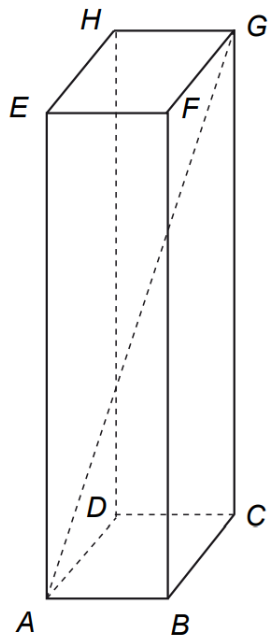
2. Tíz focicsapat egy tornán olyan rendszerben játszotta a meccseket, hogy mindenki mindenkivel pontosan egy meccset játszott. Átlagosan hány gólt lőttek meccsenként, ha a torna alatt összesen 135 gólt lőttek?

3. Egy autóbuszos kirándulásra páros számú diák ment. Mindannyian befértek egy 30 férőhelyes buszba. Hány diák vett részt a kiránduláson, ha 10-szer annyi lány vett részt a kiránduláson, mint fiú?

4. Határozzátok meg az egyenes iránytényezőjét, ha áthalad az $A\,[3;0]$ és $B\,[4;2]$ pontokon!

5. Olga és Péter osztálytársak egyazon egyenes utca ugyanazon oldalán laknak. Az utca másik oldalán nincsenek házak. Olgáék házától balra 7 ház, jobbra pedig 25 ház áll ebben az utcában. Péter az utca középső házában lakik. Határozd meg, hány ház van Olgáék és Péterék háza között!

6. A téglatest oldalainak aránya 1 : 4 : 9. A testátlójának (lásd az ábrát) hossza 18 cm. Számítsd ki centiméterekben mérve a téglatest leghosszabb élének a hosszát!

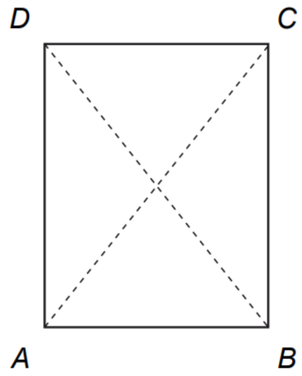


7. Határozd meg a legkisebb p természetes számot, amire a $2\sin x = p$ egyenletnek nincs megoldása!

8. Adott az $f(x) = 2^{x+1}$ függvény. Határozd meg, milyen x-re egyenlő az f függvényértéke 64-el!

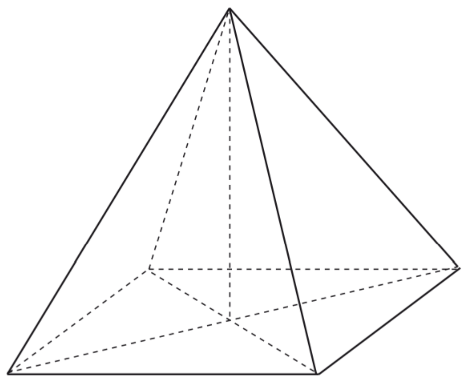
9. A 2 és 17 számok közé illeszd be az x és y számokat úgy, hogy együtt egy számtani sorozat egymást követő tagjai legyenek. Határozd meg x és y értékét! A válaszadó ívre írd be a nagyobbat közülük!

10. Az $ABCD$ téglalap középpontjának távolsága az AB oldalegyenestől 3 cm-rel nagyobb, mint a BC oldalegyenestől való távolsága. A téglalap kerülete 52 cm. Számítsd ki a téglalap területét! Az eredményt cm^2-ben add meg!



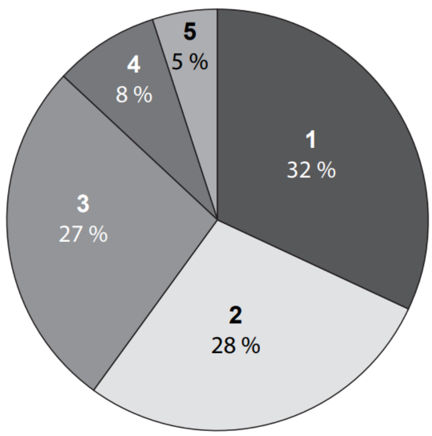
11. Létezik három olyan n természetes szám ($n \neq 1$), amire teljesül: Ha az n számmal osztjuk 37-et és 47-et, akkor ugyanazt a maradékot kapjuk. Mindegyik keresett n-nél ez a maradék különböző lehet. Határozzuk meg e három szám összegét!

12. A szabályos négyoldalú gúla (lásd az ábrát) oldalélének hossza $c = 5\ cm$, oldalélének az alaplap síkjával bezárt szöge $30°$. Számítsd ki a gúla térfogatát cm^3-ben.



13. Két párhuzamos egyenespár egyenletei a $y = 2x + 1$, $y = 2x - 5$ és $y = 1$, $y = 3$. Számítsd ki az egyenesek által határolt paralelogramma területét!

14. A tanulók év végi matematika jegyeit a következő diagram szemlélteti. Határozd meg két

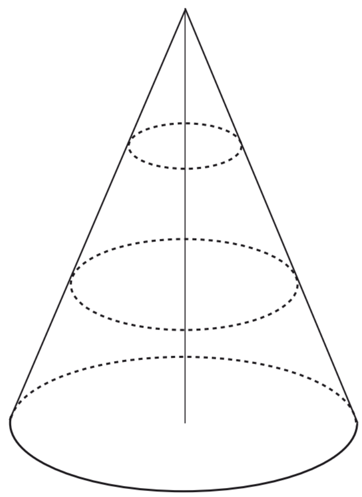


tizedesjegy pontossággal a diagramon szemléltetett év végi jegyek számtani átlagát!

15. A téglatest alakú, 145 cm mély, 6 m és 4 m alapélű medencét a tavaszi felújítás során le kellett festeni. A festéshez 750 ml-es csomagolású speciális medencefestéket használtak,

amelynek 1 literje 12 m^2 medencefelület lefestésére elégséges. Legalább hány egész csomag festék szükséges felhasználni a medence három rétegben történő lefestéséhez.

16. A kúpot, melyek alapkörének sugara 12 cm és magassága 15 cm, az alaplappal párhuzamos síkokkal három testre osztjuk. A síkok a kúp magasságát három egyenlő részre osztják. Határozzuk meg a legnagyobb és a legkisebb létrejött test térfogatának arányát!



17. Az $f: \ y = 2 - \frac{1}{x+3}$ függvény inverz függvényét az $f^{-1}: \ y = a + \frac{b}{x-2}$ alakban írhatjuk föl, ahol $a, b \in \mathbb{R}$. Határoz meg az $a + b$ összeget!

18. Határozd meg a q együtthatónak azt a pozitív értékét, amelyre az $y = 2x + q$ egyenlettel megadott egyenesnek a $x^2 + y^2 = 5$ egyenletű körrel pontosan egy közös pontja van!

19. Határozd meg azt az n természetes számot, amire a $\sqrt{2n(2n+1)}$ egy olyan derékszögű háromszög átfogója legyen, aminek a befogói $\sqrt{2n+27}$ és n!

20. Adott a $f: \ y = -3x^2 + 4x + c$ másodfokú függvény ismeretlen c együtthatóval. Határozd meg a legkisebb olyan c egész számot, amelyikre az f függvény grafikonja két különböző pontban metszi az x koordináta-tengelyt!

A **2018**-as teszt nyílt feladatai:

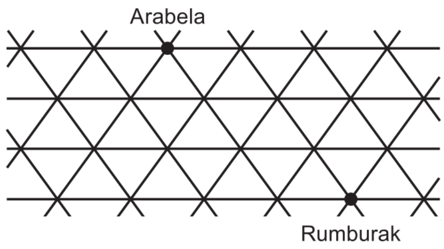
1. A Celzius-fok (C) Fahrenheit-fokra való átváltására (F) az $F = C \cdot \frac{9}{5} + 32$ átváltó képletet használjuk. Hány Celzius-fok van New Yorkban, ha ott a hőmérő 23 Fahrenheit-fokot mutat?

2. A 15-öt írják fel két pozitív szám összegeként úgy, hogy az első szám négyszerese a második szám négyzetével legyen egyenlő. A válaszadó lapra írják a két szám közül a nagyobbikat!

3. A számtani sorozat öt tagból áll. Az első tagja a 2, az utolsó a 32. Számítsák ki a számtani sorozat összes tagjának az összegét!

4. Az $y = \frac{3}{2}x + \frac{27}{2}$ függvény grafikonja áthalad a $[8; a]$ és a $[b; 3]$ koordinátájú pontokon. Számítsák ki az $a + b$ összeget!

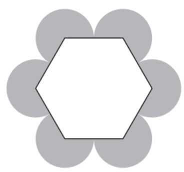
5. Arabela és Rumburak a háromszögek királyságában laknak, ahol minden út egyenlő oldalú háromszög oldala (úgy, ahogy az ábrán látják). Állapítsák meg, hány különböző útvonalon juthat el Arabela Rumburakhoz, ha csak a megrajzolt utakon mozoghat, és mindig a legrövidebb távolságot teszi meg!



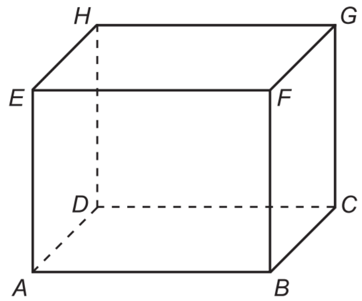
6. Az egyenlő szárú trapéz területe $262,5\ cm^2$. Magasságának nagysága $15\ cm$, szára $17\ cm$ hosszú. Számítsák ki centiméterekben a rövidebb alapjának a hosszát!

7. Adott az $x^2 + (y-3)^2 = 25$ egyenletű k kör. Határozzák meg a k kör és az x tengely metszéspontjainak távolságát!

8. Az ábrán a szabályos hatszög oldalának hossza egy centiméter. Számítsák ki négyzetcentiméterekben az ábra szürkére festett részének területét, amely hat körcikkből áll!



9. Az $ABCDEFGH$ téglatest méretei $|AB| = 8\ cm$, $|BC| = 3\ cm$ és $|CG| = 5\ cm$. Az M pont az AB élének a középpontja. Számítsák ki centiméterekben az MG szakasz hosszát!

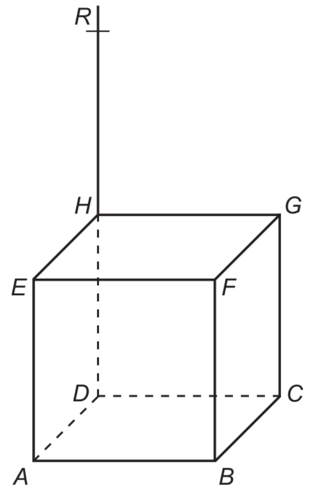


10. A lovasklub az istálló mellett a lehető legnagyobb területű, téglalap alakú, elkerített kifutó építését tervezi. A kifutó elkerítésének terve az ábrán látható. Az elkerítéshez (vastag vonallal jelölve) 200 méter dróthálót használnak fel. Hány négyzetméter lesz a kifutó területe?

11. Anna füzetében 3 különböző számjegy volt leírva, egyik sem volt közülük nulla. Utána leírta a számjegyekből alkotható összes háromjegyű számot. Ezekben a számokban felhasználta mind a három számjegyet. Majd az összes így kapott háromjegyű számot összeadta. Összegük 1554 volt. Az összeadott számok közül melyik a legkisebb?

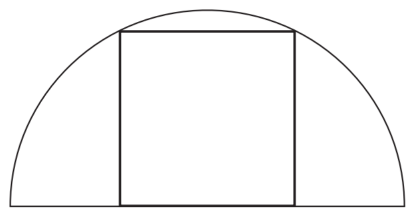
12. A használt autóbusz értéke minden évben előző évi értékének $15,5\%$-ával csökken. Hány egész év elteltével csökken először az autóbusz értéke az eredeti értékének egyharmada alá?

13. Adott az $|AB| = 4$ cm élű $ABCDEFGH$ kocka. A H pont a DR szakasz középpontja. A kocka síkmetszete az ACR síkkal egy trapéz. Számítsák ki centiméterekben a trapéz kerületét!



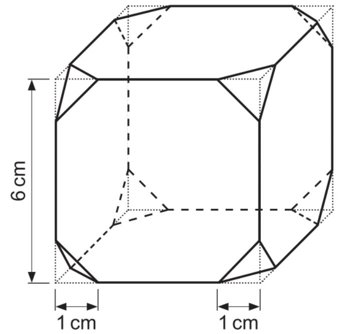
14. Az $y = 2x + 1$ egyenest tükrözzék az $y = x$ tengely szerinti tengelyes tükrözésben! A válaszadó lapra az így keletkezett egyenes iránytényezőjét írják!

15. A 2 cm sugarú félkörbe egy négyzetet írtunk. Számítsák ki négyzetcentiméterekben a négyzet területét!

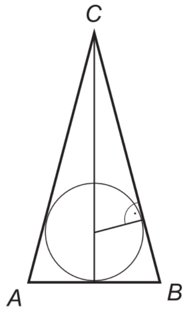


16. Gyurinak öt kártyája van, rajtuk az 1, 2, 2, 3 és 5 számjegyek. Összesen hány öttel osztható négyjegyű számot rakhat ki Gyuri a kártyákból?

17. Péternek volt egy 6 cm élű kockája. Levágta a csúcsait úgy, hogy ezáltal a kocka minden éle a levágott csúcsnál 1 cm-rel rövidebb lett (lássák az ábrát). Hány köbcentiméter a megmaradt test térfogata?

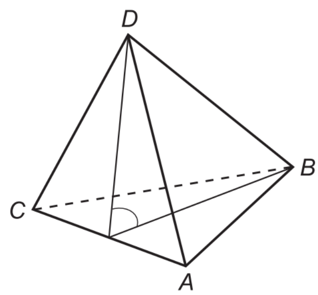


18. Adott az AB alapú egyenlő szárú ABC háromszög. Az alapra húzott magasság nagysága a háromszögbe írt kör sugarának a hatszorosa. Számítsák ki fokokban az ACB belső szög nagyságát!



19. Számítsák ki deciméterekben a 16 dm^2 területű szabályos nyolcszög kerületét!

20. Adott az $ABCD$ háromszög alapú gúla. Tudjuk, hogy $|AD| = |BD| = |CD| = 3\ cm$, és $|AB| = |BC| = |CA| = 4\ cm$. Számítsák ki fokokban az ACD és az ABC sík által bezárt szög nagyságát!



A nyílt tesztfeladatok összehasonlítása

A lineáris függvénnyel foglalkozik a 2010-es teszt 4. feladata (iránytényező meghatározása), akárcsak a 2018-as teszt 1. és 4. feladata is (behelyettesítés). A két teszt vonatkozó feladatait azonos nehézségűnek becsüljük.

Másodfokú függvénnyel foglalkozik a 2010-es teszt 20. feladata (mikor van a függvénynek metszéspontja az x tengellyel), akárcsak a 2018-as teszt 2. feladata (másodfokú egyenlethez vezető egyenletrendszer), de másodfokú egyenletre vezet Pitagorasz tételének alkalmazása után a 2010-es teszt 19. feladatában is, ahogyan 2018-as teszt 10. feladatában is egy másodfokú kifejezés szélsőértékét (maximum) kell megkeresni. Ez esetben a 2018-as feladatokat tartjuk nehezebbnek.

Szögfüggvények alkalmazásáról szól a 2010-es teszt 7. és 12. feladata (a szinusz függvény értékkészletének alkalmazása, illetve a tangens függvény alkalmazása a gúla magasságának meghatározásában, majd a gúla térfogatának kiszámítása), akárcsak a 2018-as teszt 18. és 19. feladata is (szög meghatározása ($\sin x = \frac{1}{5}$), illetve az adott területű szabályos 8-szög oldalhosszának meghatározásához). Megjegyezzük, hogy ez utóbbi feladat megoldható szögfüggvények nélkül is. A két teszt vonatkozó feladatait azonos nehézségűnek becsüljük.

Inverz függvény kiszámítását kéri a 2010-es teszt 17. feladata, majd a két paraméter összegét. A 2018-as teszt 14. feladatában azt kell észrevenni, hogy az $y = x$ szerinti tükrözés inverz függvény keresése. Természetesen ez utóbbi megoldható volna azonban analitikus geometriai eszközökkel is. Ez esetben egyértelműen a 2018-as feladat nehezebb.

Exponenciális függvények alkalmazásáról szól még 2010-es teszt 8. feladata (egy egyszerű egyenlet megoldása), akárcsak a 2018-as teszt 12. feladata is (szöveges feladatból kell felírni az egyenletet). Ez esetben egyértelműen a 2018-as feladat nehezebb.

Analitikus geometriai a 2010-es teszt 13. (egyenesek metszéspontja, pontok távolsága, egyenesek távolsága és paralelogramma területe) és 18. feladata (mikor érinti az egyenes a kört?), akárcsak a 2018-as teszt 7. feladata (kör és az x tengely metszéspontjainak távolsága). Ez esetben egyértelműen a 2010-es feladatok nehezebbek.

Síkmértannal foglalkozik a 2010-es teszt 10. (a téglalap oldalait kell a kerület alapján kiszámolni, majd a területét), illetve a 2018-as teszt 6. (a trapéz tulajdonságait felhasználva és Pitagorasz tételét alkalmazva kellett meghatározni mennyivel hosszabb az egyik alap, majd a területből az alapokat meghatározni), a 8. (8 darab körcikk területének összegét kellett kiszámítani) és 15. feladata (Pitagorasz tételét kellett alkalmazni). Átlagosan a 2018-as feladatok kissé nehezebbnek tekinthetőek.

Térmértannal foglalkozik a 2010-es teszt 6. (az élek arányának és a testátló hosszának ismeretében kell meghatározni a leghosszabb él hosszát Pitagorasz tételének segítségével), 15. (egy fedőlap nélküli téglatest felszínének kiszámítása után arányossággal meghatározni a lefestéséhez szükséges festék mennyiségét) és 16. feladata (a vázolt kúpok térfogatának arányát kellett kiszámítani), illetve a 2018-as teszt 9. (Pitagorasz tételének kétszeres alkalmazása), 13. (Pitagorasz tételének háromszoros alkalmazása), 17. (kocka és háromoldalú gúlák térfogatszámítása) valamint a 20. feladata (Pitagorasz tételének kétszeri és a háromszög koszinusz tételének alkalmazása). Átlagosan a 2018-as feladatok kissé nehezebbnek tekinthetőek.

Számtani sorozatokról szól a 2010-es teszt 1. (a számtani sorozat összege és a számtani átlag közti kapcsolat alkalmazása) és 9. feladata (a számtani sorozat két közbülső tagját kell megtalálni), illetve a 2018-as teszt 3. (a számtani sorozat három közbülső tagját kell megtalálni, majd a tagok összegét). Ez esetben egyértelműen a 2018-as feladat nehezebb, tulajdonképpen e feladat majdnem annyit vár el, mint a két 2010-es feladat.

Kombinatorikai volt a 2010-es teszt 2. feladata (kombinációt kellett kiszámolni), illetve a a 2018-as teszt 11. (az összes permutáció összege mindegyik helyértékre a számjegyek összegének a kétszeresét adja s az 14-el egyenlő; tekintve hogy három különböző nemnulla szám jegy összege 7, ezek csak az 1, 2, 4 számjegyek lehetnek) és 16. feladata (az oszthatóság miatt az 5-ös helye rögzített, utána ismétléses variáció – de az összes lehetőség is felírható). A két feladat közül az elsőt (a 2010-eset) igényesebbnek tartjuk.

2010-ben négy feladathoz nem található pár. A 3. aritmetikai feladat: páros, 30-nál kisebb szám ami 11 többszöröse. Az 5. feladat két ház közti házak számát kell megkeresni, ahol arra kell ügyelni, hogy a számosság a különbségtől eggyel kevesebb. A 11. oszthatósági feladat. A 14.-ben pedig a diagramról leolvasott értékek súlyozott átlagát kellett kiszámítani.

A 2018-as tesztben csak a 4. feladathoz nem találtunk párt. Ez egy egyszerű gráfos feladat, aminek eredménye az ábráról könnyen leolvasható.

Bár a nem összepárosítható feladatok közül több volt 2010-ben, de azokat az 11. oszthatósági feladat kivételével nem tekinthetjük igazán nehéz feladatoknak. Ezért aztán a összefoglalva a korábban leírtakat úgy véljük, hogy a tesztek nyílt feladatai között a 2018-as teszt nem tekinthető könnyebbnek mint a 2010-es.

A **2010**-es teszt zárt feladatai:

21. Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat n-edik tagja az $a_n = \frac{40n+2}{n+3}$ alakban adott. Határozzák meg a legnagyobb olyan n számot, amire $a_n < 39$.

    A 112

    B 113

    C 114

    D 115

    E 116

22. Az ABC háromszögben adott az $a = 2\ cm$, $b = 3cm$ oldalak és a $\gamma = 60°$ szög. Számítsák ki a c oldal hosszát!

A $\sqrt{11}\ cm$

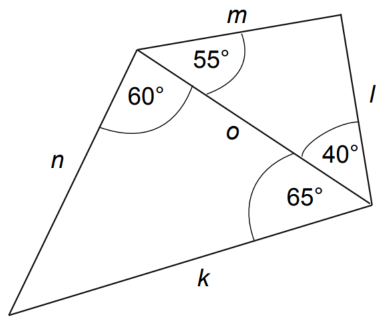
B $\sqrt{7}\ cm$

C $\sqrt{5}\ cm$

D $\sqrt{3}\ cm$

E $\sqrt{2}\ cm$

23. Döntsék el, hogy az ábrán látható k, l, m, n, o szakaszok közül melyik a leghosszabb!



A a k szakasz

B az l szakasz

C az m szakasz

D az n szakasz

E az o szakasz

24. Adott két állítás:
Az első állítás: „Ha egy négyszög paralelogramma, akkor az átlói kölcsönösen felezik egymást."
A második állítás: „Ha egy négyszög átlói kölcsönösen felezik egymást, akkor az a négyszög paralelogramma."

Az alábbi állítások közül mennyi igaz a fenti két állításról?

- Az első állítás igaz.
- A második állítás hamis.
- A második állítás ekvivalencia.
- A második állítás az első negációja.

A 4

B 3

C 2

D 1

E 0

25. Az első üzlet nyitvatartási ideje 9:00-12:00 és 13:30-16:00, a másodiké 8:00-14:30 és a harmadiké 8:30-12:20 és 14:00-16:00. Milyen hosszú ideig van nyitva mindhárom üzlet egyidejűleg?

A 180 *perc*

B 210 *perc*

C 330 *perc*

D 450 *perc*

E 480 *perc*

26. Határozza meg az $f:\ y = \log_2 \frac{3x-2}{1-x}$ függvény értelmezési tartományát!

A $\left(\frac{2}{3};1\right)$

B $\left(\frac{2}{3};\infty\right)$

C $\left\langle\frac{2}{3};1\right)$

D $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)\cup(1;\infty)$

E $(-\infty;1)\cup(1;\infty)$

27. A cserék után a kispadra véletlenszerű sorrendben ült le öt jéghokis. Mi a valószínűsége annak, hogy ötük közül a két legjobb csatár egymás mellé ült?

A 0,8

B 0,4

C 0,2

D 0,1

E 0,05

28. Hányszorosára nő a gömb alakú atmoszferikus léggömb felszíne, ha a térfogata 8-szorosára nőt?

A 4

B 16

C 32

D 8

E 2

29. Hány olyan természetes szám van 10 és 100 000 között, ami természetes szám második hatványa?

A 316

B 315

C 314

D 313

E 312

30. Határozza meg mindazon egész számok összegét, amelyek gyökei a $\sqrt{6-3x} < 4$ egyenlőtlenségnek!

A 6

B 3

C 2

D -6

E -3

A **2018**-as teszt zárt feladatai:

21. Válasszák ki azt a függvényt, amely egyenlő az $y = -2x^2 + 4x + 6$ hozzárendelési szabállyal megadott függvénnyel!

A $y = 2(x-2)^2 + 2$

B $y = -2(x+2)^2 + 2$

C $y = -2(x+1)^2 + 8$

D $y = 2(x-1)^2 + 8$

E $y = -2(x-1)^2 + 2$

22. Adott az $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ hételemű halmaz. Hány olyan háromelemű részhalmaza van az A halmaznak, amely <u>nem tartalmazza</u> a g elemet?

A 15

B 20

C 21

D 25

E 35

23. Hány egész szám a megoldása az $|x|^3 - 1 \leq 9$ egyenlőtlenségnek?

A 3

B 4

C 5

D 6

E 7

24. A lehetőségek közül melyikben van megadva az $f: \ y = \log(2x^2 + 4x - 6)$ függvény értelmezési tartománya?

A $(-\infty; -1) \cup (3; \infty)$

B $(-3; 1)$

C $\langle -3, 1 \rangle$

D $(-\infty; -1\rangle \cup \langle 3; \infty)$

E $(-\infty; -1) \cup (3; \infty)$

25. A tanulók az iskola érettségiző diákjai szemeinek színéről készítettek felmérést. A felmérés eredményét táblázatba foglalták.

		a szemek színe		
		barna	kék	zöld
nem	nő	21	13	5
	férfi	24	16	5

Véletlenszerűen kiválasztunk egyet az iskola érettségiző diákjai közül. Határozzák meg annak a valószínűségét, hogy az nő lesz vagy kék színű lesz a szeme!

A $\frac{13}{84}$

B $\frac{29}{84}$

C $\frac{13}{28}$

D $\frac{55}{84}$

E $\frac{17}{21}$

26. Válasszák ki az $x - 2 > \frac{3}{x}$ egyenlőtlenség összes megoldásának halmazát!

A $(3; \infty)$

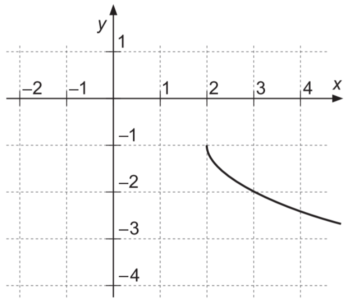
B $(-1; 0) \cup (3; \infty)$

C $(-1; 3)$

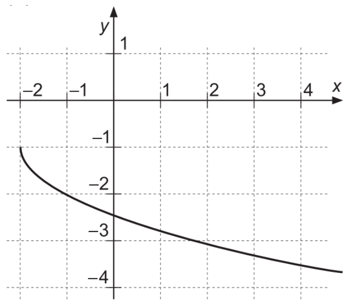
D $(-\infty; -1) \cup (3; \infty)$

E $(-\infty; -3) \cup (1; \infty)$

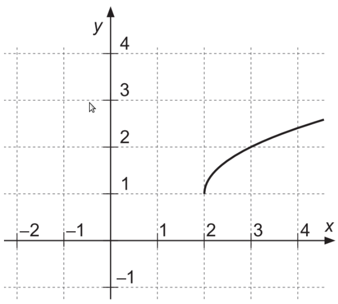
27. Az alábbi grafikonok közül melyik ábrázolja a $(-\infty; -1\rangle$ intervallumon értelmezett $y = (x+1)^2 + 2$ függvény inverz függvényét?



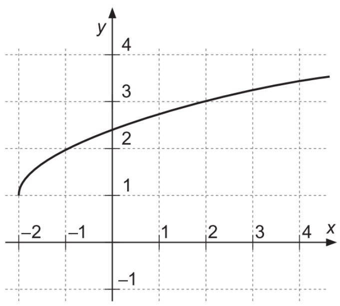
A



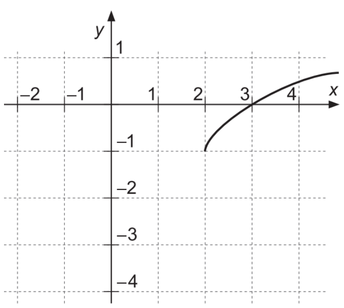
B



C

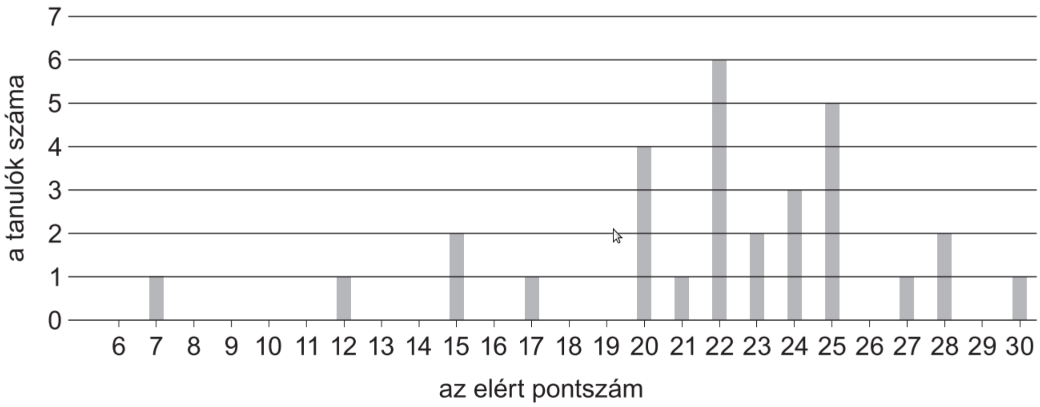


D



E

28. A 4. C osztályban goniometriából írtak dolgozatot. Az értékelést a diagramon láthatják. Átlagosan hány pontot szereztek azok a tanulók, akik dolgozatának értékelése jobb volt az



elért pontszámok számának moduszánál?

A $\frac{271}{13}$

B $\frac{131}{6}$

C $\frac{122}{5}$

D $\frac{178}{7}$

E $\frac{157}{6}$

29. Pali ezt állította:
„Ha ma este uszodába megyek (U), akkor veszek hasábburgonyát (H) vagy kofolát (K).” A lehetőségek közül melyikben van megadva az állítás helyes negációja?

A $\neg U \implies (\neg H \wedge \neg K)$

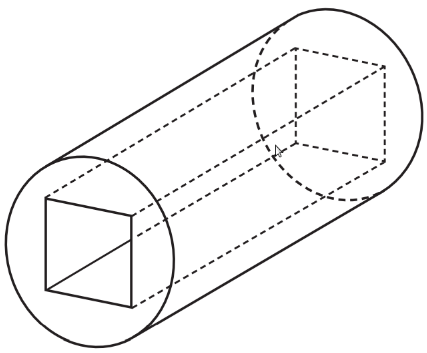
B $(H \wedge K) \implies U$

C $\neg U \wedge (H \wedge K)$

D $U \wedge (H \vee K)$

E $U \wedge (\neg H \wedge \neg K)$

30. Az iskola igazgatója elhatározta, hogy építtet egy henger alakú mászókát (lássák az ábrát). A henger hossza 5 m, alaplapjának sugara pedig 1 m. A hengerbe egy téglatest alakú lyukat fúratott, amelynek alaplapja 1 m élű négyzet. Utána az igazgató befestette a mászóka külsejét és belsejét is. Hány négyzetmétert festetett be?



A $12\pi + 18$

B $11\pi + 19$

C $10\pi + 20$

D $12\pi + 20$

E $12\pi + 22$

A zárt tesztfeladatok összehasonlítása

A 2010-es teszt 21. feladata arra volt kíváncsi, hogy a sorozat milyen legnagyobb értékére teljesül a feltétel. A megoldás a „nagy könyv” szerint egyenlőtlenség oldásával oldható, de megteszi az is, ha a válaszlehetőségekben vett helyettesítési értékeket kiszámoljuk. A 2018-as 21. feladat a megadott függvény más alakban vett alakjai közül kívánta megkerestetni a neki megfelelőt (algebrai átalakítások). Azért állítottuk párba az előbb írttal, mert a feladat pofonegyszerűen oldható a függvényeknek az egyszerűség kedvéért 0-ban vett helyettesítési értékekeinek meghatározásával is. A feladatok közel azonos igényességűek, a helyettesítési trükk nélkül ez utóbbi számításigényesebb, a trükkel meg az első.

A 2010-es teszt 24. feladata két, paralelogrammákról kimondott állításról fogalmaz meg logikai állításokat. A 2018-as teszt 29. feladata egy állítás logikai formalizmussal felírt negációját kellett kiválasztani. Az előbbi feladatban geometriai tudás is kellett a megoldáshoz, a formális logika miatt mégis a második (a 2018-as) feladatot érezzük nehezebbnek.

A 2010-es teszt 26. feladata, akárcsak a 2018-as 24. feladata a függvény értelmezési tartományának kiválasztását kérte. Mindkét esetben logaritmus függvény szerepelt, de 2010-ben az argumentumban egy törtkifejezés, míg 2018-ban egy másodfokú kifejezés szerepelt. Ez alapján a 2010-es feladatot tartanánk igényesebbnek.

Kombinatorikai, valószínűségszámítási a 2010-es teszt 27. (valószínűség: a kedvező lehetőségek száma 4, az összes $\binom{5}{2}$) akárcsak a 2018-as 22. (egy kombináció $\binom{6}{3}$) és 25. feladata (valószínűség: a kedvező lehetőségek száma a nők száma + a kék szemű férfiak száma, a összesé az összes diák száma). Mivel a 2010-es feladat mind kombinatorikai, mind valószínűségszámítási elemekkel rendelkezett, így véleményünk szerint ez a feladat csaknem felért a 2018-as feladatokkal.

Térbeli számítási feladat volt a 2010-es teszt 28. feladata (a gömb térfogata és felszínszámítását kellett alkalmazni) és a 2018-as teszt 30. feladata (a henger és a szabályos négyoldalú egyenes hasáb felszínszámítását kellett alkalmazni). Ezek közül, habár csak kissé, de véleményünk szerint a 2010-est tartjuk igényesebbnek.

Egyenlőtlenségek megoldásával foglalkozott a 2010-es teszt 30. feladata (az egész gyökök összege kellett), akárcsak a 2018-as teszt 23. (az egész gyökök száma kellett) és 26. feladata (a megoldási intervallumokat kellett kiválasztani). A három feladat közül az elsőnél és az utolsónál nem volt szabad megfeledkezni a feltételekről, a középsőt próbálgatással is ki lehetett számolni. A legigényesebbnek – bár nem sokkal – az 2018-as teszt utolsó feladatát tartanánk.

A 2010-es év négy feladatához nem tudtunk neki megfelelőt rendelni a 2018-asok közül. A 22. a koszinusz- a 23. pedig a szinusztétel alkalmazását (vagyis azt, hogy a háromszöggel a legnagyobb szöggel szemközt van a leghosszabb oldala) tűzi ki feladatul. Az 25. és a 29. feladat aritmetikai volt: három üzlet közös nyitvatartását kellett percekben kifejezni valamint 10 és 100 000 között a négyzetszámok számát kellett kiszámítani.

A 2018-as tesztben két feladat maradt fel: a 27.-ben egy függvény inverzének grafikonját kellett kiválasztani, a 28.-ban pedig a módusztól jobb értékelések súlyozott átlagát.

Összefoglalva a feladatsorok zárt részének összehasonlítását globálisan hasonló nehézségének tartjuk a két teszt feladatait.

A tesztek nehézségének összehasonlítása

Mivel a tesztek hivatalos kiértékelése nem csoportosította az egyes feladatokat témakörönként ezért az alsó tagozatos tesztek összehasonlításhoz hasonlóan a nyílt és a zárt feladatokra különkülön megvizsgáltuk, hogy tudunk-e találni olyan típusú feladatokat az egyes tesztekben, amelyek összevethetőek. Ezek után az össze nem párosítható feladatokat is megvizsgálva megpróbáltuk a tesztek nehézségét egymáshoz képest megbecsülni.

Ha a tesztek nyílt és zárt válaszos feladatainak összevetését és figyelembe vesszük, véleményünk szerint a 2018-ban alkalmazott teszt egyértelműen nem tekinthető kevésbé igényesnek.

Ha ezen megállapításunkat most összehasonlítjuk a matematika érettségik központi írásbelijeinek (a tesztek) átlagos eredményességével, ami 2010-ben 59% volt és 2018-ban 57%, akkor mondhatnánk akár azt is, hogy a kissé nehezebb teszten átlagosan 2%-kal rosszabb eredményességet elérni nem is olyan rossz teljesítmény. Ezt a kissé gyengébb eredményességet magyarázni is tudná az igényesebb teszt.

Tegyük azonban hozzá, hogy a tesztek formátumában annyi változás történt, hogy a 2018-as teszt megírásakor annak megoldására fél órával több állt rendelkezésére az érettségizőknek.

Ne feledkezzünk meg azonban arról sem, hogy Szlovákiában a matematika nem kötelező érettségi tantárgy. 2018-ban az érettségizők 12,8%-a írta meg a bemutatott tesztet, s azoknak 74,2%-a gimnazista volt. 2010-ben 9010 diák érettségizett matematikából, ami az abban az évben érettségire jelentkezőknek több mint 22,1%-a volt és azok közül csak 69,1%-uk volt gimnazista. Tehát 2018-ra lényegesen kisebb arányban választották a matematikát érettségi tantárgynak (feltehetően azok, akik jónak érzik magukat benne), és azok között is arányában több gimnazista volt, mégsem sikerült a 8 évvel korábbi eredményességet meghaladni, de még csak tartani sem! Ha csak az átlagos eredményességet nézzük (lásd a táblázatot) a 2018-as eredmény pedig még jónak is nevezhető. A korábbi évek adatai nem túl hízelgőek, de ha a részvevők arányának csökkenésével sem sikerül olyan eredményességet elérni mint pl. 2010-ben, akkor logikus, hogy a teljes érettségiző populáció matematikai tudása valóban csökkenő tendenciát kell hogy mutasson, és így a felsőoktatásban jelentkező szubjektív tapasztalatoknak valószínűsíthetően van kimutatható alapja.

A tesztek bemutatása és azok elemzése is mutatja az előírt tananyagbeli változásokat, hangsúlyeltolódásokat. A 2010-ben megíratott tesztek még a 2008-as közoktatási tananyagára építettek és ezért ebben legnagyobb arányban geometriai feladatok szerepeltek (13), még a kombinatorika, valószínűségszámítás éa statisztika témakörből csak 2 feladat volt. A 2018-ban használt tesztben (a 2008-ban bevezetett tantervnek megfelelően) már csak 10 geometria feladat volt, viszont a kombinatorika, valószínűségszámítás éa statisztika témakör 6 feladattal volt képviseltetve.

A bemutatott tesztek is alátámasztják azon állításunkat, hogy a geometria tananyag ellenőrzésekor geometriai szerkesztések az érettségi írásbeliken sem szerepelnek.

II. rész

A matematika, a geometria oktatásában használható szoftverek

3. fejezet

A matematikai szoftverek és a matematika oktatásában használható szoftverek rövid történeti áttekintése

Jelen fejezetben rövid, de nem teljes áttekintést kívánunk tenni a matematikai szoftverek fejlődésére, főként a fejlődés kiváltó okait vizsgálva, s nem részletes leírásra és összehasonlításra törekedve az egyes termékek között.

A számítástechnika fejlődése a matematikától nehezen választható el, hiszen a számítógépek alapvetően (bonyolult) matematikai számítások elvégzésére létrehozott gépek voltak.

A 17. században feltalált és gyártott mechanikus számológépek (pl.: Blaise Pascal: 1673, Gottfried Wilhelm Leibniz: 1673) a négy alapművelet elvégzésére alkalmas fogaskerék-áttételű automaták voltak.

A 20. század közepén megjelenő elektronikus számítógépek összetettebb matematikai műveletek elvégzésére is alkalmasak voltak, viszont főként hadi célokra, röppályaelemzésekre használták. Az 1980-as évekig a számítógépek csak állami kutatóintézetek, egyetemek rendelkeztek ilyen nagy és drága berendezésekkel. A 80-as, 90-es évektől kezdődött meg a személyi számítógépek (personal Computer - PC) korszaka, amelyek olyan mikroprocesszoros, kis méretű, tömegesen előállított számítógépek voltak amelyek kereskedelmi forgalomban, átlagemberek számára is elérhető váltak.

Az elektronikus számítógépek gépi kódú programozását fokozatosan felváltották a feladatok áttekinthetőbb megjelenítését lehetővé tevő programozási nyelvek. Az első magas szintű általános célú programozási nyelv, amit elsősorban matematikai számítások megkönnyítésére fejlesztettek ki az 1950-es években a Fortran volt. A Fortran és a hozzá hasonló programozási nyelvek numerikus számítások elvégzésére volt tervezve, azonban a matematikai kutatásokban felmerült az igénye szimbolikus számítások végzésére is.

Szimbolikus számítás alatt olyan matematikai műveleteket értünk, amelyek nem elégszenek meg egy tetszőlegesen pontos numerikus közelítéssel, hanem matematikailag pontos, egzakt eredményt adnak. Nagyon egyszerű példaként az $\frac{1}{2}$ hatványainak összegét hoznám fel ($\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$). Minden rendesebb matematikai műveltségű ember számára nyilvánvaló, hogy ha ezt vég nélkül összegezzük, akkor egyet kapunk. A laikusok számára is nyilvánvaló azonban, hogy első lépésben (összeadásban) az 1/2-hez hozzáadjuk az egy egészből megmaradt fél rész felét, majd minden egyes lépésben mindig a megmaradt rész felét adjuk az előzőkhöz. Ha ezt a végtelenségig csináljuk, a megmaradó rész állandó felezésével 0-hoz kell közelítsünk, azaz az összeg 1-hez kell hogy tartson. Egy másik ilyen példa egy függvény primitív függvényének (antideriváltjának) a megkeresése. Numerikus számítással ennek határozott integrálja ismert algoritmusokkal kiszámítható, de a primitív függvény már nem.

Az ezt követő évtizedekben, jellemzően a 60-as évek végétől kezdődően, kezdték el fejleszteni azokat, illetve jelentek meg azok a speciális makrokörnyezetet és függvénykönyvtárakat tartalmazó programozási nyelvek, később szoftvercsomagok, amelyek numerikus számításokat és adatfeldolgozást biztosítanak (pl.: SPSS - 1968-tól, SAS – 1966-tól, MATLAL az 1970-es évek végétől, lásd: https://en.wikipedia.org/wiki/Comparison_of_numerical_analysis_software), és a szimbolikus műveletek elvégzését is lehetővé tevő számítógépes algebra rendszerek (Computer Algebra System – a továbbiakban mint „CAS") (pl.: Reduce – 1968-tól, Macsyma – 1968-tól, Maxima – 1967-tól, Maple – 1980-tól, Mathematica 1996-tól, lásd: https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_computer_algebra_systems). Természetesen a CAS szoftverek numerikus számítások elvégzésére is alkalmasak, és egyes numerikus számítások végzésére alkalmas szoftverek is idővel kifejlesztettek olyan csomagokat, amelyekkel szimbolikus számítások végezhetők (pl. a Scilab 1990-től és a Symbolic Math Toolbox 2008-tól a MATLAB-hoz). Egyes CAS specializálódtak, és a matematika egyes tudományágaiban nyújtanak segítséget a kutatóknak (pl.: a PARI/GP a számelméletben, a GAP a csoportelméletben és a kombinatorikában, ...).

A megemlített évszámok általában a fejlesztés megkezdését jelentik. A fejlesztés évekig is eltartott míg a szoftver használható, kiadható állapotba került. A konkurenciának köszönhetően a szoftverek fejlesztése nem állt le, és néhány több évtizedes múlttal és számos kiadási verzióval rendelkezik. Jó néhány fejlesztése azonban különböző okok miatt be lett fejezve, de folyamatosan jelentek meg új matematikai szoftverek is, amelyek a technológia – a számítógép-tudomány, a számításelmélet és a programozási nyelvek fejlődése miatt új kezdetet jelentettek. A számítógépes információfeldolgozás fejlődése a 20 század második felétől olyan alapvető elméleti eredmények, megfelelő, effektív algoritmusok kidolgozásához vezetett a hardveres előlépésekkel szinergikusan, amelyek adott esetekben szinte kikényszerítették új kezdetet jelentő szoftverrendszerek megjelenését, mivel egyszerűbb volt egy, az új elméleti eredményekre és alapokra épülő rendszert a korábbi tapasztalok alapján kidolgozni, mint egy meglévő rendszer alapjaiba beépíteni azokat.

A matematikai szoftverek számának és fejlődésének kedvezett a személyi számítógépek megjelenése és tömeges elterjedése is. Ennek köszönhetően egyre több felhasználóhoz tudtak eljutni, de legalább ilyen fontos volt, hogy a széles tömegekhez való eljutás miatt a számítógépek grafikus képességei rohamos fejlődésbe kezdtek az 1980-as, 90-es években. A grafikus felülettel rendelkező operációs rendszerek magukkal hozták a matematikai szoftverek grafikai szintű fejlődését is. Ez egyrészt abból állt, hogy a korábban csak az ASCI karakterek segítségével kiírt, gyakran több sorba szétírt megoldásokat, fogyasztható, megjelenés szempontjából korrekt matematikai jelek és szimbólumok segítségével jelentek meg (grafikus felület nélkül pl. egy integráljel vagy egy szumma jele több sora lett széthúzva, perjel, balra-per jel vízszintes és függőleges vonal karakterek adták ki a szimbólumokat). Másrészt a matematika szorosan kapcsolódik a vizualizációra is, pl. egy többváltozós függvény grafikonját szeretnénk korrektül megjeleníteni, vagy valamely paraméterek változásának megfelelően egy függvény grafikonját animáltan is megtekinteni. A fejlesztések nemcsak a kimeneti sorokban megjelenő eredményekben és grafikonokban mutatkoztak meg, de harmadrészt megemlítenénk a grafikus felhasználói környezet (Graphical User Interface – GUI) megjelenését is, ami által specializált programnyelvből szoftverekké váltak. Ennek köszönhetően nagy tudású robusztus rendszerek is könnyen használhatóvá váltak a szoftverrel ismerkedők számára is, hiszen nem volt szükség egyszerű feladatok elvégzéséhez a parancskészlet alapos ismeretére, mivel azok a menükből, sőt az eszköztárak ikonjai segítségével is meghívhatók lettek.

Erre, a grafikus lehetőségek megjelenésének az idejére tehetőek az első dinamikus geometriai szoftverek (Dynamic Geometry Software) bemutatkozása is (Geometric Supposer, Cabri Geometry – 1986, The Geometer's Sketchpad). Ezek olyan geometriai szerkesztések elkészítését tették lehetővé, amelyeknek alapobjektumai (a felvett alappontok helyzete, távolságok és szögek nagysága, stb.) interaktívan (pl. az egérkurzorral) megváltoztathatóak, ezért is nevezték ezeket később inkább interaktív geometriai szoftvereknek (Interactive geometry software – IGS).

A 2000-es évek elejére a számítási jellegű szoftverek esetében a matematikus közösség elvárása az lett, hogy a szoftverben munkalap jellegű állományokat tudjanak készíteni, ahol a számításokon kívül megjegyzések is szerepelhetnek, illetve, hogy a program által kigenerált eredményformulák matematikai kéziratok szövegébe könnyen átemelhetőek legyenek. Az ezekben készített grafikonok, animációk és szimulációk valamint a geometriai szoftverek esetében is elvárásként jelent meg, hogy azok eredményei weboldalba illeszthetők legyenek. Tendenciaként említhetjük meg még azt a törekvést is, hogy a szoftverkészítők igyekeztek a termékeiket olyan irányban fejleszteni, hogy az adott termék a matematika több ágában is használható legyen. Példaként a GeoGebra szoftvert emelném ki, ami a 2000-es évek elején interaktív geometriai szoftverként jelent meg (a neve a geometria és az algebra szavak összevonásával jött létre) és geometriai szerkesztőfelület mellet egy algebrai ablak is volt, ahol a geometriai objektumok algebrai (analitikus geometria) reprezentációja jelent meg. A szoftverben ezt követően megjelent a parancssor, ami függvények és az azzal végzett műveletek ábrázolását tette lehetővé, majd CAS, táblázatkezelő, 3d nézet is került bele, s így ma már a matematika szinte minden ágában használható szoftver.

Ezzel kb. egy időben jelentek meg azok a grafikus számológépek is, amelyek grafikus függvényábrázolást, CAS funkciókat is támogattak.

A 2010-es évekre a kihívást a jelentett a nagy adathalmazok (Big Data) valamint a nagy számításigényű (High Performance Computing) feladatok kezelése, amit speciális hardverek – szuperszámítógépek és az ehhez illeszkedő szoftveres megoldások fejlesztése formájában nyilvánult meg, ami a már meglévő matematikai szoftverrendszerek, -csomagok illesztésére igyekezett megoldást találni a megváltozott hardveres architektúrához.

Ugyancsak az utóbbi egy évtizedre datálható a matematikai szoftverek, appok mobileszközökön való megjelenése, ami a grafikus számológépek sorsát meg is pecsételte.

A matematikai szoftverek fejlesztése során szempontként tudott megjelenni a számítógépen futó operációs rendszer is. A személyi számítógépek elterjedése előtt a masszív számítási teljesítményű, bemutatott matematikai szoftverek általában Unix alapú rendszerekre voltak fejlesztve. A személyi számítógépeken való futtathatóság érdekében a piacvezetőnek számító Windows operációs rendszerre elkészültek hozzájuk olyan front-endek, amelyek lehetővé tették, hogy azokat Windowson is futtatni tudják a felhasználók. Az újonnan fejlesztett szoftverek egy részét már alapvetően erre az operációs rendszerre fejlesztették ki. A matematikai szoftverek nem tömeges célközönség számára készülnek és a matematikusok közül sokan Linux, MacOS rendszereket használnak így a jelentősebb matematikai szoftverek ezen operációs rendszerek számára is rendelkeznek változatokkal. Az újbóli nagy nyitást ebbe az irányba egyrészt a Big Data és HPC okozta, hiszen ezek a párhuzamos számítást és feladatmegosztást igénylő rendszerek Linux alapú operációs rendszereken futnak, másrészt a mobileszközökön a szintén Linux alapú Android terjedése is ebbe az irányba mutat (forrás: https://www.statista.com/statistics/543185/worldwide-internet-connected-operating-system-population/).

Hasonlóan az operációs rendszerhez szintén megosztó tud lenni a szoftver árazása. Egyes fejlesztőcsoportok szellemi kihívásként, tudományos munkájuk részeként kezelik a szoftverüket és ezért azt ingyenesen bocsátják a felhasználók részére. Ezen belül is különbséget tehetünk a nyílt forráskódú szoftverek, bizonyos feltételek mellet (pl. General Public Licenc – GPL) és a nem nyílt forráskódú, de szabadon felhasználható szoftverek között. Mások azonban üzleti vállalkozásként kezelve fizetősen árulják produktumaikat és szolgáltatásaikat (pl. támogatás), a fejlesztés költségeit a végfelhasználóra terhelve. Természetesen volt példa arra is, hogy egy fizetős szoftver, vagy annak egy korábbi változata később ingyenesé vált. A fizetős matematikai szoftverek licencpolitikái is általában megkülönböztetik az akadémiai, a diák, vagy az kommerciális célú licenceket. A fizetős szoftverek esetében esetében azok lehetőségeinek tárháza gyakran nagyobb, specializált feladatok végzésére alkalmasak és a kezelhetősége is egyszerűbb. Nem zárható ki azonban, hogy ugyanazt a feladatot egy ingyenes szoftverrel ne tudnánk megoldani.

A matematika oktatásában használható és használt szoftverek elsődlegesen a matematikai szoftverek közül lettek kiválasztva és eleinte a képzés magasabb szintjein (felsőoktatás) kerültek alkalmazásra. Tömeges, trendszerű megjelenésük a 2000-es évek elejére tehető Szlovákiában: számos egyetemi konferenciakötetben jelentek meg olyan tanulmányok, amelyek valamilyen matematikai szoftver (leggyakrabban a *Mathematica*) (felső)oktatásban való használatát, alkalmazási lehetőségeit mutatták be (lásd például a (Gunčaga, 2004), (Velichová & Kováčová, 2005) tanulmányokat). Mivel a matematika egyes területein komoly szerepet játszik a vizualizáció, a szemléltetés, ezért a matematika oktatásába fokozatosan azon szoftverek kerültek előtérbe, amelyek ezt jobban és hatékonyabban meg tudták oldani. Világítsuk meg ezt egy konkrét példával: egy egyszerű valós függvény grafikonját szeretnénk kirajzoltatni és bemutatni a diákjainknak. Választhatunk egy nagy tudású komplex matematikai programcsomag (ami licencköteles, ismernünk kell a parancsait, a szintaktusát és lehetőségeit, hogy használni tudjuk, a telepítése igényes, ...) és egy ingyenes, pár MB-os futtatható program közül, ami a feladatot kielégítően el tudja végezni, könnyebb a kezelése, a kirajzolt grafikon helyes és adott esetben jobb minőségű mint a drága változaté. Nyilván a kis ingyenes függvényábrázoló program valószínűleg nem képes szimbolikusan kiszámítani elliptikus integrálokat vagy bonyolult differenciálegyenleteket, de nem is ezt vártuk el tőle! Ilyen szempontból nem biztos, hogy a komplex CAS rendszer használata a legeffektívebb. A matematika oktatásában így nyertek létjogosultságot azok a szoftverek, amelyeknek lehetőségei nem összevethetőek professzionális matematikai programcsomagokkal, de a szemléltetés céljaira bőségesen elegendőek.

Természetesen ez nem okvetlen jelenti azt, hogy ezen szoftverek, mint pl. az interaktív geometriai szoftverek ne volnának felhasználhatóak tudományos célokra is akár. Habár az elemi geometria területén nehéz olyan új ismeretekkel előállni, ami ne lenne már jó ideje ismert, de ki sem zárható ez: pl. a háromszög Exeter pontját 1986-ban egy számítógépek alkalmazásáról a matematikában workshopon fedezték fel. A lehetőségek a folyamatos fejlesztéseknek köszönhetően nőnek, hiszen vannak olyan matematikai szoftverek, amelyeken az a célja, hogy automatikus tételbizonyításokat tudjanak végrehajtani.

Már a 2000-es évek elején felmerült a kérdés, ami napjaink mérnökképzésében is újra aktualitást nyer, hogy mi az oktatás célja: azokat a matematikai ismereteket akarjuk a hallgatókkal megtanultatni, amelyről úgy véljük, hogy szükségesek lehetnek a számukra, vagy megtanítsuk-e őket egy olyan szoftveres eszköz használatára, aminek a tudása meghaladja az általuk megszerezhető matematikai tudás (ismeretek, képességek, eljárások, de ezen felül feldolgozási kapacitás is) határait. Az alapvető gond az, hogy amit a diák megtanul, az egy adott programcsomag használata, azonban a szoftverek változnak, és pár év elteltével az adott szoftver lehet már nincs tovább támogatva, vagy megváltozott a felhasználói felülete, és így annak használata problémát jelenthet a felhasználónak. A felhasználó a szoftver nélkül nem képes a feladatot oldani. A matematikai ismeretek (pl. hogy hogyan lehet differenciálegyenletet oldani, vagy hogy hogyan szerkesztjük meg egy háromszög köré írható körének középpontját) azonban nem változnak. A megfelelő matematikai ismeretek nélkül a felhasználó nem képes a kapott eredmény kritikus vizsgálatára a megoldás helyességének ellenőrzésére sem.

A matematika oktatásában véleményünk szerint létjogosultsága van megfelelő szoftverek használatának, azonban úgy véljük, hogy azoknak a matematika oktatását, a tananyag szemléltetését, a különböző ismeretek szintézisét kell támogatnia, s nem válhat öncélúvá!

4. fejezet

Szoftverek a szlovákiai oktatási rendszerben

A szlovákiai kormányzati szervek az elmúlt pár évtizedben meglehetősen sokat fektettek be az oktatási rendszer informatikai hátterének támogatásába, s így a rendszerváltás idején meglévő szignifikáns különbség a hazai és a Nyugat-európai informatikai infrastruktúra között jelentősen lecsökkent. A minisztérium a Microsoft vállalattal szerződést kötött, ami alapján a teljes oktatási rendszer számára az operációs rendszer és az Office irodai csomag licencét biztosították.

Kiemelném az Infovek (szó szerinti fordításban: Info-Kor) projektet, ami a 2000-es években (1999-től 2016-ig) az infokommunikációs technológiák segítségével a hagyományos iskolákat a harmadik évezred modern, alkotó iskoláivá átalakítását tűzte ki célul, s amelynek keretén belül az iskolák számítógépekkel történő felszerelését és az Internet bevezetését igyekezett biztosítani minden iskolába. További célkitűzés volt még modern oktatási tartalom elkészítése az egyes tantárgyak számára, és a tanárok kiiskolázása a moredn infokommunikációs eszközök használatáról. A hardveren kívül szoftverlicenceket is vásárolt és biztosított az iskolák számára. A matematika oktatásához a Cabri Geometry II és a Derive szoftverek országos, a közoktatást lefedő licenceit vásárolták meg. A projekt weboldalán (már nem elérhető) a tanárok számára voltak közzétéve segédanyagok, matematikai szoftverekre való hivatkozások (linkek) gyűjteménye is.

A 2013/2014-es tanévre a minisztérium megvásárolta és azóta az iskolák számára üzemelteti a *Planéta vedomostí* (szó szerinti fordításban: a tudás bolygója) programcsomagot, ami tulajdonképpen egy webes felületen elérhető oktatási portál (http://planetavedomosti.iedu.sk). Elsődlegesen azon iskolák, tanárok és diákok számára lett kifejlesztve, akik érdeklődnek az új és modern oktatási és tanulási módszerek iránt. A portál célja, hogy minőségi, attraktív és stimuláló oktatási segédanyagokkal szolgáljon az oktatás résztvevői számára a matematikából és a természettudományos tantárgyakból. Jelenleg több mint 30 000 oktatási tananyagot tartalmaz: multimediálisan feldolgozott tartalom videó, animáció, szimuláció, prezentáció, illusztráció, 3D modell, ábra, fénykép, interaktív gyakorlat vagy feladat formájában. A tananyagok szintek (ISCED), témakörök szerint kategorizált komplex rendszert jelent az iskolák és azok tanárai számára, ami az oktatási anyagok előkészítése, azok tanórán való használata mellett a diákok által elkészített házi feladatok ellenőrzésére is alkalmas. A tananyag természetesen összhangban van az állami oktatási programmal.

A matematikai szoftverek (lásd fentebb) és a matematika szemléltetésére, oktatására kifejlesztett szoftverek mellett megemlíteném még az irodai programcsomagok táblázatkezelő szoftvereit (Excel), amelyek matematika oktatásán belüli alkalmazásával többen is foglalkoztak a régióban.

Ahogyan az a fentiek alapján is látható, a kormányzat, a minisztérium aktívan támogatta az info-kommunikációs technológiák és az interaktív oktatóanyagok közoktatásban való jelenlétét. Egy csomó valódi és önjelölt szlovákiai oktatási szakember vízválasztóként az infokommunikációs technológiák használata által választotta szét a hagyományos és a modern oktatási módszereket. Az vitán felül áll, hogy a számítógépek, a nagy teljesítményű mobil-eszközök a világon és társadalmunkban olyannyira elterjedtek, hogy tudomást sem venni róluk és teljességgel ignorálni azokat esztelenség volna. El kell fogadnunk, hogy lehetnek ezen eszközök és a köré épült szoftveres megoldások alkalmazásának pozitív hozadékai az oktatásban és ezen belül a matematika oktatásában is. Felmerül azonban a kérdés, hogy az eszközigény, és egyes szoftveres megoldások bebiztosítása megoldja-e az oktatás problémáit?

Az utóbbi pár évtizedben voltak olyan technikai eszközök, amelyek egy-egy bemutató előadás erejéig úgy tűntek, hogy „megváltják” majd az oktatási rendszerünket. Ilyenek voltak anno a számológépek, később a grafikus számológépek, a számítógépek, a tabletek és az interaktív táblák. A kezdeti nagy lelkesedés elmúltával azonban ezen eszközök tömegesített bevezetése mégsem hozott kiemelkedő eredményeket, a kísérleti bevezetés során szerzett tapasztalatoknál, sőt az azt megelőző „hagyományos” módszereknél is kevésbé eredményesnek bizonyultak sok esetben. Mi okozza ezt a látszólagos ellentmondást? Véleményünk szerint az, hogy míg az innovatív eszközökkel esetleg módszerekkel történő oktatás az oktató saját belső motivációjával megegyező, addig meggyőződésből fogja az oktatását így kezelni, és ennek hitelessége, elhivatottsága a tanulók, diákok számára is érezhető és lelkesítő. Ha sikerül felkelteni a tanulók, diákok érdeklődését, azt már fél sikernek tekinthetjük, ha sikerül hosszabb távon fenntartani, az már csaknem elérendő célnak. Amikor a diák először találkozik azzal, hogy a tanár nem csak felolvas a tankönyvből valamit, hanem egy számítógépes prezentációt hoz be az órára, az mint új dolog érdekelni fogja őt. De ha a tanárainak többsége hasonló prezentációkat vetít ki, amin ugyanazt, ugyanolyat lát, mint amit a tankönyvben láthatott korábban, akkor joggal merül fel a kérdés, hogy mennyiben több, jobb ez, mintha a tankönyvet lapoznák a tanár útmutatásai szerint?

Sok esetben az az eldöntendő kérdés, hogy mi az oktatás célja: megtanítani a diáknak egy matematikai ismeretet, vagy megtanítani egy eszköz (fizikai vagy szoftveres) használatára. Pitagorasz tétele 100 éve is az volt, most is az és a jövőben is az, ami: egy összefüggés a derékszögű háromszögek oldalai között, amelyet a gyakorlati életben is használhatunk. Ha van ma egy eszközünk, pl. egy szoftver, ami megoldja az adott célfeladatot, akkor mennyi időt szenteljünk a szoftver kezelésének az oktatásának? Az az adott szoftver vajon elérhető lesz-e mondjuk 10 év múlva és nem fog-e megváltozni a kezelőfelülete?

Gyakorta visszatérő kérdés, hogy valóban azok az eszközök, és szoftverek a legmegfelelőbbek az oktatáshoz, amelyeket az iskola, annak fenntartója bebiztosít hozzá? Úgy véljük, hogy az ideális az volna, hogy ha vannak megalapozott igények (mind hardveres, mind szoftveres), akkor azokat kellene kielégíteni. Ha van olyan oktató, aki valamilyen eszközt, szoftvert használhatónak ítélne meg, akkor legyen lehetősége annak bevezetésére az oktatásba. Ha olyan eszközt, szoftvert kap, ami őt magát sem érdekli, akkor kicsi a valószínűsége, hogy azt a tanításba bevigye, és ha valamilyen felsőbb kényszer folytán beviszi, akkor annak, hogy azzal kívánt eredményt érje el. Ha azonban nem kap meg egy olyan értelmes, hozzáférhető eszközt, ami az iskola számára megengedhető volna, úgy viszont nem érheti el azokat az eredményeket, amelyeknek meg lettek volna az előfeltételei, és ezáltal a tanár motiváltsága csökkenhet. Ez bűvös körökhöz vezethet: A tanár azért nem használ egy eszközt mert nincs neki. Ha megkapja, érdekesebbek lesznek az órái, és felfigyelhet rá az iskola vezetősége is. Ha az eszköz hasznosnak tűnik, akkor úgy volna effektív, ha mások is kihasználhatnák annak lehetőségeit. Ha egy tanár azért használ egy eszközt, mert az vele szemben az elvárás, akkor nem biztos, hogy a kívánt hatást váltja ki vele, és nem az elvárt eredményeket fogja szállítani. Ha többen is használják az eszközt, akkor az újdonság-íze a diákok szemében csökken.

A másik ezzel kapcsolatos problémakör a tanítók, tanárok továbbképzése. A 2008-as közoktatási reformot követően 2009-ben Szlovákia törvényt fogadott el a pedagógiai és iskolai szakalkalmazottakról. A törvény és az arra épülő alacsonyabb szintű rendelkezések által a tanítók, tanárok arra vannak motiválva, hogy továbbképzéseken vegyenek részt, ami mögé egy kreditrendszer lett kiépítve. Az egyes képzésekért kapható (6 évnél nem régebbi el nem évült) kreditek a pedagógus bérezésére hatással vannak, sőt bizonyos kreditszám (60) a bértáblázatban magasabb bérkategóriába jutást eredményező atesztációnak is feltétele. A tanítók, tanárok tehát (a zsebükön keresztül is) motiváltak abban, hogy továbbképzéseken vegyenek részt. A továbbképzéseket a bebiztosítóknak akkreditáltatni kell. Jelenleg több mint 900 ilyen program rendelkezik akkreditációval (https://www.minedu.sk/data/att/13785.pdf). A képzéseket egyes iskolák, felsőoktatási intézmények, a kontinuális képzés céljainak bebiztosítására a minisztérium által létrehozott szervezet, az államigazgatás más szerve által működtetett oktatási szervezete, olyan egyház vagy más jogi személy, amelyik tevékenységi körében szerepel az oktatás szolgáltathatják. A legtöbb akkreditált programmal a Módszertani-pedagógiai Központok hálózata rendelkezik, akik Európiai Uniós pályázatoknak köszönthetően ingyenesen biztosítják képzéseiket. Az egyetemek és további állami fenntartású szervezet mellett számos korlátolt felelősségű társaság, non-profit szervezet és részvénytársaság is bebiztosít képzéseket.

Azt az elvet, hogy a pedagógusok számára célszerű és hasznos lehet a továbbképzések rendszere, azt senki sem vitatja, hiszen a pedagógus tanulmányai befejezte óta magának az oktatott tudományágnak is jelentős tudományos eredményei, áttörései születhettek meg, s a szakmai, módszertani felkészültségben is mutathatnak a számára újat. Ahogy a mondás is tartja, jó pap is holtig tanul. Azt, hogy a tanárok továbbképzése hogyan valósul meg, azt már viszont többen vitatják. A tanár abban érdekelt, hogy krediteket szerezzen, és ehhez nem okvetlenül a legjobb, számára legmegfelelőbb szakmai továbbképzést választja, hanem amelyet a legegyszerűbben tud teljesíteni. Ezért a pedagógusok hajlandóak egy-egy fizetős képzést is bevállalni, ha az könnyen teljesíthető, vagy olyan ingyenes képzést is teljesít, ami szakmailag neki nem ad semmi hasznosíthatót sem. Egyes társaságok azért hirdetnek olcsó oktatási programokat, hogy az általuk forgalmazott termékeket ilyen formában reklámozzák. A továbbképzési programokat kínáló szervezetek abban érdekeltek, hogy minél több potenciális résztvevőt szólítsanak meg és vonzzanak be a képzéseikre, azaz általánosabb témákat fogadtatnak el. A gondot abban látjuk, hogy meglehetősen kevés olyan továbbképzési program van a kínálatban, ami egy matematika tanárnak szakirányos továbbképzést kínál. Nem vitatni kívánjuk, hogy a kooperatív oktatási módszerekről, vagy az interaktív tábla használatáról tartott továbbképzés hasznos-e egy tanárnak, csupán azt fogalmazzuk meg, hogy egy matematika tanár számára legalább ilyen fontos volna az ő specifikus matematika módszertani továbbképzése.

2019 áprilisában új, a pedagógusok és szakmai alkalmazottakról szóló törvényt fogadott el a parlament, ami megszünteti az eddigi pedagógus-továbbképzési rendszert. Hogy pontosan mi fogja ezt felváltani, az jelenleg még nem megmondható.

5. fejezet

Interaktív matematikai szoftverek használata az oktatásban

Egy matematikai szoftvert akkor neveznénk interaktívnak, ha az lehetővé teszi, hogy a vele végrehajtott számítások, eredmények, valamint azok reprezentációiba interaktívan be tudjunk avatkozni. Az interaktivitást a matematikus is szívesen veszi, hiszen gondolatkísérleteket tud leellenőrizni, az adatok modifikációját, speciális eseteket tud megvizsgálni. Ugyanezek megmutatása a matematika oktatásán belül véleményünk szerint még fontosabb, hiszen így tudjuk effektíven megmutatni a matematikai gondolkodás természetét.

5.1. A megfelelő szoftver választásának kérdései

A matematika tantárgy felső tagozatos oktatási standardjai azt állítják, hogy: „A megfelelő szoftver használatának meg kéne könnyítenie néhány igényesebb számítást, vagy eljárást, és így lehetőséget biztosít a megoldandó probléma lényegére összpontosítani." („Použitie vhodného softvéru by malo uľahčiť niektoré namáhavé výpočty alebo postupy a umožniť tak sústredenie sa na podstatu riešeného problému.")

A kérdés ez esetben az, hogy milyen, melyik szoftver tekinthető megfelelőnek?

A technikai feltételek (pl. a használt eszköz és operációs rendszer) mellett felmerülnek elvi kérdésként az anyagi, pénzügyi követelmények is. Ahogy azt már korábban említettük alapvetően olyan szoftvert javasolnánk ami operációs rendszertől függetlenül használható, sőt lehetőleg már mobil platformokon (tabletek, okostelefonok) is futathatók legyenek, és lehetőleg ingyenesen használhatóak. A fizetős szoftverek esetében problémának látjuk azt, hogy az adott szoftver bővített licencei (pl. a Cabri Geometry II. korábbi egész közoktatást lefedő, vagy az egyetemek ún. campus-licencei) is csak az iskolák területén biztosítanak jogtiszta felhasználást a diákoknak és így az otthoni felkészülésben már azokat nem használhatnák, vagy az erre a célra rendszeresített kedvezményes árú speciális diák licenceket meg kéne vásárolniuk – amit viszont a tanár milyen alapon követelhet meg tőlük. Tehát a fizetős szoftver iskolai megvásárlása nem jelenti még okvetlen, hogy a diákok számára bebiztosítottunk valamit.

Alapvető dilemma, hogy a szoftverhasználattal mi a matematika oktatását kívánjuk támogatni és nem a matematika oktatására szánt időkeretből akarunk még időt szánni arra, hogy öncélúan valamilyen szoftver használatát tanítsuk. A szoftvernek olyan segédeszköznek kell lennie, ami a matematika oktatását támogatja, hatékonyabbá teszi.

Ahogyan a tanmenetekben láthatjuk, szerepelt a kiegészítő tananyagok között a számológép használata is. A laikusok és diákok részéről is gyakran megfogalmazódó kérdés, hogy minek megtanulni számolni, hiszen a számológép gyorsabb is, pontosabb is. A számolási készség azonban előfeltétele tud lenni egyes erre épülő absztraktabb fogalmaknak (pl. algebra), ahol a számolási készség kialakítása során szerzett gyakorlati, tapasztalati ismeretek és jártasságok átültethetőek az új, absztraktabb fogalmaknál (pl. az összeadás és a szorzás kommutativitása, ...). Másrészt szintén a számolási gyakorlatnak, tapasztalatnak köszönhetően alakul, fejlődik ki az ezekre való becslés képessége is, ami kulcsfontosságú lehet a számológép-használat során is, hiszen a számológépbe hibásan írt (elírt) számítás eredményéről jó lenne tudnunk, hogy az nem lehet helyes, ha pl. nagyságrendileg sem megfelelő.

Habár a számológép egy hatékony eszköz nehéz matematikai műveletek gyors és pontos eredményének megszerzésére, a matematika órán nem azt kell okvetlen tanítanunk, hogy hogyan számoljunk számológéppel, hanem hogy hogyan számoljunk. Ráadásul a számológépek változnak, fejlődnek, és az, hogy a diák egy adott eszközzel megold egy feladatot, még nem szükségszerűen jelenti, hogy egy másikkal is képes lesz rá. Az oktatási tapasztalat általában azt mutatja, hogy a tanárnak kell megmutatnia azt is, hogy hogyan használja a diák a saját számológépét. Másrészt viszont például egy térfogat- vagy felszínszámítási feladat esetében az elvégzendő számítási műveletek nem az adott tananyag és feladatmegoldási stratégia részét képzik, csak kiegészítő eszköz, és a számológép használata a feladatmegoldás idejét meg tudja rövidíteni. Hasonló a helyzet az info-kommunikációs eszközök és a szoftverek használatával is. Az oktatási folyamatot kéne hogy támogassák, s nem a szoftverhasználatot kéne tanítani, hanem annak segítségével, mint megfelelő céleszközzel az aktuális tananyagot (Csiba, 2008a), (Csiba, 2009)!

Ezért is célszerű az oktatás támogatásához olyan szoftvert választani, ami a fenti céloknak a lehető leginkább megfelel valamint:

- a választott területen megvalósíthatók legyenek vele a matematikai vagy azon belül a geometriai elképzeléseink,
- a felhasználó számára a lehető legegyszerűbb és legintuitívabb legyen a használata,
- az elkészített számítások, szerkesztések legyenek interaktívak, tehát a bemeneti adatok legyenek megváltoztathatóak és az eredmény annak megfelelően változzon,
- legyen kellően pontos, ne adjon hamis vagy félreértelmezhető eredményt,
- a megoldandó feladathoz legyen adekvát (nem szükséges pl. egy CAS alapműveletek elvégzésére).

A geometria oktatásának területén véleményünk szerint az interaktív geometriai szoftverek a legmegfelelőbbek. Tapasztalataink alapján a fenti feltételeknek leginkább a GeoGebra szoftver felel meg leginkább, ezért is fogunk az alábbiakban ennek a használatával részletesebben foglalkozni. A megfogalmazott elvek, problémák azonban általában más szoftverek esetében is fennállnak.

5.2. Szoftverek használatának lehetőségei a geometria oktatásában

Tekintsük át a lehetőségeket az oktatás, tanulás és a feladatmegoldás folyamatának megfelelő időrendi sorrendben.

Szemléltetés

Mivel a geometriai fogalmak meglehetősen vizuális jellegűek (a szerkesztési geometria egyértelműen szinte elképzelhetetlen vizuális szemléltetés nélkül, de a számítási részeket tartalmazó tananyagok fogalmainak és kapcsolatainak bemutatásaihoz ábrákat használunk), ezért új tananyag bevezetésekor célszerű azokat olyan alakban megjeleníteni, hogy abból a tanuló a megfelelő ismereteket és azok elvárt összefüggéseit tudja levonni.

A számítógépes ábrának óriási előnye a táblára rajzolt ábrával szemben az, hogy pontos és interaktív. A táblára rajzolt ábrának a szerkesztési eszközöknek és a kréta vagy filctoll vastagságának következtében van egy pontatlansága, ami összetettebb ábra esetében még kumulálódik is, ezért a szerkesztő személynek kellő motorikus képességekkel kell rendelkeznie. A számítógépes ábrakészítéshez is természetesen szükséges bizonyos kézügyesség a szoftver használatának jártasságai mellett, de pl. egy egyenes biztos nem fog „meggörbülni”. A számítógéppel készített ábra interaktivitása alatt azt értjük, hogy bizonyos bemeneti adatok megváltoztatásával az ábra az előre meghatározott törvényszerűségeknek megfelelően változzon meg. Egy konkrét példát választva: Mutassuk meg, hogy a háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást! A súlyvonalak a csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakaszok. A táblán ezt mindössze egy tetszőlegesen megválasztott háromszög és annak súlyvonalainak felrajzolásával szemléltetjük. Ha megfelelő interaktív geometriai szoftverrel rajzoljuk ezt meg, akkor a felvett tetszőleges háromszög csúcsai szabadon megfoghatók és elmozgathatók a síkon, miközben a felezőpontok mindvégig interaktívan a megfelelő oldalak, szakaszok felezőpontjai maradnak, s így a súlyvonalak is a megváltoztatott háromszög súlyvonalai. A változtatásnak köszönhetően láthatóvá válik, hogy az állítás nem csak a felrajzolt ábrára tűnik igaznak, hanem tetszőleges háromszögre. Másrészt az ábrára rá is tudunk közelíteni, és meg tudjuk mutatni, hogy a három súlyvonal valóban egy ponton halad keresztül. Egy másik beépített funkciója a GeoGebrának még arra is képes, hogy leellenőrizze két objektum kapcsolatát, azaz ha kijelöljük két súlyvonal metszéspontját, akkor megvizsgálgattuk, hogy milyen ennek a helyzete a harmadik súlyvonallal (rajta fekszik).

A térgeometria terén az interaktivitás kibővül még azzal is, hogy a háromdimenziós modell nézete is megválasztható, forgatható, ami a táblára rajzolt ábra esetén nem megvalósítható. Példaként azt említeném meg, hogy egy kocka testátlói egy pontban metszik egymást (a kocka középpontja).

Úgy véljük, hogy a szemléltetés ezen módjai a tanulók, diákok számára élményszerűbbek, hihetőbbé teszik a kimondott állítások általános érvényességét és így érthetőbbé válik azok számára is akik nem rendelkeznek az adott szinten eléggé fejlett absztrakciós képességekkel vagy térszemlélettel.

Az elkészített szemléltető anyagok appletként is elmenthetőek és megoszthatóak, így online tananyagokba is beágyazhatóak. Ezáltal a diák a tanórán kívül, otthoni felkészülésében is felhasználhatja. A szemlététő tananyagok készítéséről az 5.8 fejezetben még részletesebben foglalkozunk majd.

Hipotézisek vizsgálata és verifikáció

A személtetésről szólva már megemlítettünk a példáink során olyan állításokat, amelyeket a szoftver segítségével ellenőrizni tudunk. A tanórai feladatmegoldások során a diákok megoldási ötleteit meg tudjuk valósítani. Ha az ötlet nem helyes, akkor az a megoldásban látható lesz. Ha az ötlet nem helyes az is hasznos, hiszen tudjuk, hogy ebben az esetben nem ezt az ötletet kell alkalmaznunk. A matematikai gondolkodás alapvetően divergens, így a tanulási folyamatban sem árt, ha néha tévútra tévedünk – ebből is tanulunk. Tapasztalataink alapján ez hasznosabb, mintha számukra elvont fogalmakkal magyaráznánk meg miért nem helyes. Természetesen a kipróbálás után megmagyarázhatjuk, hogy az miért helyes, vagy nem helyes.

A sejtésünkben szereplő, felfedezendő, belátandó állítást hipotézisnek nevezzük. Az interaktív számítógépes ábrával végrehajtott állítás tesztelését pedig verifikációnak. A hipotézisek vizsgálata jó módszer lehet az élményalapú, felfedező jellegű oktatási módszerek oktatásban való alkalmazására. A felvetett probléma felfedezéssel történő megoldása fel tudja kelteni a diákok figyelmét, érdeklődését, és a fogalmi hálóba jobban beágyazott ismeretet produkál, mintha az adott állítást kimondott tételként kéne csak megtanulnia. A verifikáció az interaktivitásnak köszönhetően nem csak egyedi esetekre, hanem tetszőlegesen sok esetben bizonyul majd igaznak, vagy sem. Egy bizonyos szint felett viszont érdemes felhívni a figyelmet arra, hogy a verifikáció nem azonos a bizonyítással – az hogy az általunk vizsgált esetekben igaznak tűnik jó alap, hogy bizonyítsuk az általános érvényességét, de nem azonos vele. Ha a verifikáció nem sikeres, akkor viszont nincs értelme bíbelődni a bizonyítással.

Hipotézisek vizsgálatát és verifikációját mind az új tananyag bevezetésekor, mind feladatok megoldása során tudjuk alkalmazni. Ha megfelelő szoftvert választunk a diákok saját, önálló feladatmegoldásaik során is használhatják.

Pontosság

A felhasználás során a diákok általában ezt a tulajdonságot szokták kiemelni az előnyök között. Aki már használt ilyen jellegű szoftvert, tudja, hogy a kivitelezéshez itt is szükséges bizonyos finommotorikus készség, és a szoftver segítségével is lehetséges sületlenségeket szerkeszteni, ha a felhasználó nincsen tisztában az alkalmazandó geometriai fogalmakkal és köztük lévő összefüggésekkel.

A témát nem kívánván elbagatellizálni, felhívnám a figyelmet pár érdekes tényre. A geometriát az első egzakt tudománynak tekinthetjük, hiszen az időszámításunk előtti harmadik évszázadban élt Eukleidész Elemek című munkájában megadta annak axiomatikus felépítését. A felvilágosodás korában (i.sz. 17. század) felépített analitikus geometria ennek az algebrai tárgyalását adta csak meg. Az ezt követően kifejlődő, önmagára tiszta geometriaként tekintő projektív geometria, majd a nem euklideszi geometriák felfedezését követően a 20. század elejére úgy tűnt, hogy e területen nem igazán lehet már újat találni. A háromszög Exeter pontját 1986-ban fedezték fel egy számítógépeket a matematikában használó workshopon a Philip Exeter Akadémián. 1988-ban adta ki Triangle centers and central triangles című könyvét Clark Kimberling (Kimberling, 1988) amiben a jól ismert háromszögekhez kapcsolódó nevezetes pontok (mint pl. súlypont, magasságpont, ...) mellett mintegy 400 háromszöghöz kapcsolódó nevezetes pontot sorol már fel. A jelenleg a témával foglalkozó és a szerző által működtetett http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html weboldal tartalmazza a jelenleg ismert nevezetes pontjait a háromszögnek, amiből több mint 30 ezret tartanak számon sorszámozva. Az Exeter pontnak 22-es a sorszáma. Szoftverek segítségül hívása nélkül valószínűleg elképzelhetetlen lett volna ennyi nevezetes pontot találni, bizonyítani a létezésüket, tulajdonságaikat.

A tudományban, de az oktatásban használható szoftveres eszközök fejlődése a háttérben rejlő rendszermagok, algoritmusok tökéletesedésével egyre több területen és egyre pontosabb eredményeket tudnak szavatolni. Megszerzett matematikai készségeink, jártasságaink azonban fel tudják hívni a figyelmünket a nyilvánvalóan nem korrekt eredményekre, amelynek okaként esetleg valamely általunk bevitt bemeneti pontatlanság derülhet ki.

Feladatmegoldás

A matematikai ismeretek akkor tekinthetők megfelelőnek, ha azokat alkalmazni is tudjuk. A feladatok megoldása azt a célt szolgálja, hogy a megszerzett ismeretek alkalmazását be tudjuk gyakorolni és így azok rögzülni tudjanak.

A szerkesztési feladatok megoldásában a megfelelő geometriai szoftverek alkalmazásának egyik fő előnye a szerkesztés pontosságában rejlik. Másrészt előnyt jelenthet az interaktivitás is, hiszen ha az ábra egyes részére sok olyan objektum kerül, ami megnehezítené az áttekinthetőséget vagy magát a szerkesztést, akkor egyszerűen egyes alapobjektumok áthelyezésével módosíthatjuk az ábrát. A GeoGebrával készített szerkesztések egyszerűen megoszthatóak, így a mintapéldáinkat a diákok akár otthoni felkészülésük során is meg tudják nézni, le tudják játszani annak folyamatát is.

A feladatmegoldás gyakorló funkciójának részét képzik a házi feladatok is, aminek megvan az a specifikus volta, hogy a tanulók, diákok a saját tempójukban, önállóan tudnak a feladatok megoldásával foglalkozni. Az utóbbi időben lehetőség nyílt arra is, hogy a geometriai feladatokat online elektronikus felületen is lehessen adni a tanítványoknak. Ezzel részletesebben foglalkozunk majd az 5.7 fejezetben.

A feladat megoldásának megvitatása

A Pólya-féle feladatmegoldási folyamat negyedik, utolsó lépése a megoldás megvitatása, diszkussziója, ami a szerkesztési feladatok megoldásának is az utolsó lépése. Általánosságában itt megvizsgáljuk, hogy helyes-e a megoldás, mik a megoldhatóság feltételei, mennyi a megoldások száma.

Megfelelő geometriai szoftvert használva a megkapott szerkesztésről el tudjuk dönteni, hogy az a feladat megadásának megfelelő-e, hiszen adottak benne mérési eszközök is. A szoftveres megoldás interaktivitásának köszönhetően a megadott bemenő adatok modifikálásával láthatóvá tehetőek, hogy mikor nincs megoldása a feladatnak, milyen esetekben van 1, 2, ... megoldása a feladatnak. Megmutatható egyes esetekben az is, hogy a feladat meghatározásában szereplő adatok megváltoztatásával milyen, és mennyi megoldást kaphatunk. Segítséget jelent ezért a tanulók, diákok számára ezen vizsgálatok lebonyolításában, mert szemléltetik megadott bemeneti adatok fényében a szerkesztési változásokat, így fejlesztik azok képességeiket az ilyen gondolatkísérletek végrehajtásában.

Az alapiskolai képzésben a szerkesztési feladatok általában konkrét adatokat tartalmaznak (pl.: Szerkeszd meg az ABC háromszöget, ha ismered az oldalainak a hosszát: $|AB| = 4cm$, $|BC| = 5cm$ és $|AC| = 6cm$!), de a középiskolai, felsőoktatásban már általában általános feladat-meghatározások szerepelnek (pl.: Szerkeszd meg a háromszöget, ha ismerjük két oldal hosszát és az egyik szög nagyságát!). Habár ez utóbbiak egy magasabb problémamegoldási szintet jelentenek, ezért viszont már alapiskolai szinten is érdemes volna foglalkozni azzal, hogy a Mi volna ha ...? típusú kérdésekkel fejleszteni tudnánk a tanulók képességeit.

5.3. Szoftverek használatának kockázatai a geometria oktatásában

Úgy véljük, hogy a korrektség jegyében ne csak a lehetőségeket mutassuk be, de a kockázatokról is szót kellene ejtenünk. A töretlen technológiai fejlődés az oktatási folyamatokban való bevezetésének próbálkozásai nem hoztak ezzel arányos pozitív matematikai tudás-, ismeretbeli előrelépést az egyes korosztályok esetében. A számítógépekhez és az internethez való hozzáférhetőség 20 évvel ezelőtti határokat feszegető felvetései mára meghaladottakká váltak (a jelenlegi alapkategóriás okostelefonok számítási kapacitása, memóriája, tárhelye többszörösen, sőt nagyságrendekkel meghaladják a 20 évvel ezelőtti legkomolyabb számítógépek teljesítményét, az akkori hálózati átviteli sebességek több nagyságrenddel eltörpülnek a mostani mobilnetes kapcsolatok sebessége mellett). A felmérésekkel foglalkozó fejezeteinkben is rámutattunk azonban, hogy nem mutatható ki a matematikai ismeretek szintjén jelentős előrelépés.

A matematika szoftverek oktatásban való használata kapcsán is a számológépek támogatott alkalmazását hoznánk fel analógiaként. Az 1980-as években a tananyag, a tankönyvek is kiemelten foglalkoztak azzal, hogy hogyan használjuk a számológépeket, s hogy az hogyan könnyíti meg számolási feladatokat és az oktatási munkát. Az elmúlt pár évtized tapasztalatai viszont azt mutatják, hogy a populáció jelentős része képtelen szorzótábla szintű szorzásokat elvégezni számológép nélkül. Ez esetben a számológép, az eszköz az amit mankóul kaptak, boldogulnak vele, s nem hajlandóak róla lemondani.

Függőség, ráutaltság

A szoftveres megoldások esetében is joggal tarthatunk attól, hogy a felhasználó a szoftver használatát megtanulva azzal képes lesz bizonyos feladatokat, számításokat de akár szerkesztéseket is végrehajtani a szoftver segítségével, azonban attól elszakítva, függetlenül elképzelhető, hogy már nem lesz képes ugyanezeket megoldani. Joggal merül fel jelen korunkban, hogy szükséges-e, s ha igen milyen szinten ismernie mondjuk egy mérnök-hallgatónak a felsőbb matematikát? Kell-e, s ha igen, milyen mélységben ismernie az infinitezimális számítások rejtelmeit, ha neki választott szakmájában a változásokat leíró összefüggések differenciál egyenletekkel adhatóak meg? Példaként azért a műszaki képzéseket hoztuk fel, mert azokon jelenleg is trend az, hogy a matematika kurzusok részben szoftverfelhasználói tanfolyamok, amelyeken egyes fizetős szoftverek használatára vannak a hallgatók tanítva matematika tantárgy gyanánt. Vajon 5, 10 vagy 20 év múlva létezik-e majd az a szoftver, nem változik-e meg a kezelői felülete, működése valamint a licencdíja? Adott szoftver használatából szerzett jártasságok mennyire használhatóak általánosságában a matematikában, vagy egy másik, hasonló jellegű szoftvernél? Mit tegyünk, ha megszakad az internet-kapcsolat, elmegy az áram? Amit technikai szempontból jelenleg még problémásnak láthatunk, az a kapcsolódó technológiák fejlődésének köszönhetően lehetséges, hogy pár év múlva banalitásnak tekintjük majd. Ami ezen felül áll az az egyes területeken a matematikai ismeretek és készségek szintjének kérdése, pl. hogy hol határozzuk meg egy alapiskolás, egy gimnazista, egy műszaki szakember, egy matematika-tanár és egy matematikus esetében azt a szintet matematikából, amit magától, internet és szoftverek segítsége nélkül is meg tud még oldani?

A függőség extrém eseteként előfordulhat, hogy a szoftverben vakon bízva elfogadjuk annak nem helyes eredményeit. Ne feledkezzünk meg azonban arról, hogy egyelőre a szoftvereket még emberek készítik, s hogyha az esetek 99,9%-ában megbízhatóan működött, még nem jelenti, hogy tökéletesen jó. Az alapos matematikai ismeretek, készségek és jártasságok a biztosítják az ellenőrzéshez szükséges szkepticizmust, amivel az esetleges programhibákon kívül a beviteli pontatlanságokra is rá tudunk jönni.

A képzelőerő sorvadása
Korábban lehetőségként említettük meg a szemléltetés kapcsán azt, hogy megfelelő szoftverek segítségével általunk, vagy diákjaink számára nehezen elképzelhető fogalmakat (pl. bizonyos függvényeket, összetett geometriai szerkesztéseket) relatíve egyszerűen, és pontosan tudunk megjeleníteni. Ez azon kívül, hogy a munkánkat meg tudja gyorsítani, az interaktivitás segítségével (realizálható és ellenőrizhető gondolatkísérletek) a képzelőerőnk fejlesztésére is hathat. Tapasztalataink azt mutatják, hogy a hozzászokás, a kialakuló függőség azonban ezen a területen rizikókat is tartalmaz, ugyanis ha a felhasználó túlságosan hozzászokik a szoftveres eszközök használatához, elkényelmesedhet a gondolkozása is, és nem fogja még csak megkísérelni sem a gondolatkísérleteket fejben végiggondolni (pl. egy geometriai szerkesztés megvitatása: a megszerkeszthetőség, a megoldások száma, akárcsak egy függvény grafikonja egy interaktív matematikai szoftveren jól látható, de ha nem érhető el egy ilyen eszköz, akkor a diákok megakadnak a megoldással). Tehát szoftverhasználat a potenciális fejlesztő hatása mellett figyelembe kell venni annak kockázatát is, és az oktatási folyamatot lehetőleg úgy irányítani, hogy annak lehetőségeit ki tudjuk aknázni, viszont a kockázatait is minimalizálni tudjuk.

5.4. A „csodafegyver”

A GeoGebra Marcus Hohenwarter szakdolgozataként indult 2001-ben. Nevét a **geo**metria és az al**gebra** szavak összevonása adta, mivel a szoftver egyidejűleg megjelenítette a képernyő síkján az egyes geometriai elemeket (pont, egyenes, kör, stb.) és ezek algebrai meghatározását (az előzőeknek megfelelően koordináták, lineáris függvény, másodfokú implicit görbe egyenlete, stb.) is. A szintetikus és analitikus geometria szemléltetéséhez a koordináta-rendszer adott volta miatt az egyes függvények ábrázolása is hamarosan megjelent benne. A szoftver licenc szempontjából elkötelezetten szabad szoftver, nyílt forráskódú, ami mind Windows, Mac OS és Linux operációs rendszereken is működik, de már online, weben is elérhető, valamint mobiltelefonokra és táblagépekre készített változatai is vannak.

A program fejlesztését már egy kiterjedt csapat végzi, és egy csomó önkéntesnek köszönhetően több mint 50 nyelvre van lokalizálva (lefordítva). A szoftverbe CAS, táblázatkezelő is integrálva lett, így algebrai (lineáris algebrai, számelméleti, egyenletmegoldási), felsőbb matematikai (akár szimbolikus differenciál és integrálszámítási, valamint differenciálegyenlet-megoldási), valószínűségszámítási és statisztikai feladatok is oldhatók vele. A kifejlesztett 3D felületen háromdimenziós (térbeli) testek, szerkesztések elektronikus modelljét (igazándiból annak egy vetületét) is elkészíthetjük, s azokat különböző nézetekből tekinthetjük meg. Legújabban a kibővített valóság számít a program legfrissebb fejlesztésének. Ezeknek köszönhetően a GeoGebra nemcsak a geometria, hanem a matematika minden ágában hasznos segédeszköze lehet egy alap- vagy középiskolai matematika tanárnak.

A szoftver kezelőfelülete meglehetősen intuitív, az egyes parancsok dokumentációja is adekvát, bár elképzelhető, hogy a fordítás kissé el van maradva a frisse verziók legújabb parancsai esetében. A GeoGebra állományok html5-ös webes appletek formájában menthetők, de legegyszerűbben a GeoGebra weboldalán, az Anyagok között tudjuk azokat közzétenni.

Jelenleg a GeoGebrát tekinthetjük a Föld legelterjedtebb, legsokoldalúbb ingyenes matematikai szoftverének, ami véleményünk szerint leginkább megfelel az oktatásban felhasználható matematikai szoftverekkel szemben támasztott elvárásainknak (lásd (Bukor, Csiba, Fehér, & Jaruska, 2012), (Csiba, 2008b), (Csiba, 2013), (Csiba, 2018b)).

5.5. Az interaktív szerkesztések univerzalitása

Megfelelő számítógépes szoftver segítségével készített szerkesztés interaktivitásával már foglalkoztunk. Arról van szó, hogy az elkészített szerkesztés egyes elemei (pontok helyzete, adott szakaszok, szögek nagysága, ...) változtathatóak, és ezen változásokkal egyetemben az előre meghatározott összefüggések alapján valós időben változik a szerkesztés. Ha egy szabadon (tetszőlegesen felvett) háromszög nevezetes pontjait akarjuk szemléltetni, akkor a háromszög csúcsait szabadon mozgathatjuk a síkon, és megmutatható, hogy a súlyvonalak (3) a magasságvonalak (3) és az oldalfelező merőlegesek (3) is egy-egy pontban metszik egymást és a kapott pontok – név szerint a súlypont, a magasságpont és a háromszög köré írható körének a középpontja – egy egyenesre illeszkednek (Euler egyenes). Megmutatható a csúcsok helyzetének változtatásával, hogy ez a háromszög alakjától nagyságától független, általános érvényű tulajdonság, aminek csak egy kirívó speciális esete van: az egyenlő oldalú (szabályos) háromszög esetében ezen három pont egybeesik.

Egyes esetekben viszont az elkészített szerkesztés az interaktív változtatás során „szétesik", nem minden esetre működik megfelelően. Hogy ne csak elméleti szinten vitassuk meg a kérdéskört, választunk egy konkrét példát, amivel szemléltetni tudjuk a jelenséget.

Példaként az Apollóniusz-kör megszerkesztését hoznánk fel. Az Apollóniusz-kör tulajdonképpen egy mértani hely: azon pontok mértani helye a síkon, amelyeknek két adott (különböző) ponttól mért távolságainak aránya adott (1-től különböző) pozitív szám. Jelöljük ezt az arányt λ-val.

A klasszikus, papíron használt szerkesztés elve abban áll, hogy elégséges három különböző pontját megszerkeszteni ennek a körnek, mert utána már ezen pontok által meghatározott háromszög köré írt körét meg tudjuk szerkeszteni. Ezen pontokat pedig úgy szerkeszthetjük meg, hogy választunk egy tetszőleges megfelelő távolságot (jelöljük p-vel), vesszük ennek λ-szorosát, majd az egyes adott pontokkal mint középpontokkal λp, illetve p sugarú köröket szerkesztünk. Ezen körök metszéspontjainak az adott pontoktól való távolsága λp és p, aminek aránya a definíció szerinti λ. Két különböző p-t választva négy, a mértani helynek megfelelő tulajdonságú pontot kaphatunk, amiből már megszerkeszthető az Apollóniusz-kör.

Interaktív szerkesztés esetén a leírt eljárásnak az elsődleges, fő hátulütője a tetszőleges távolság (p) megválasztásával függ össze. Ha a megadott alappontok szabadon mozgathatók, akkor erre a távolságra, p-re és λp-re teljesülnie kell a háromszög egyenlőtlenségnek. Ha az alappontok távolsága a többi távolsághoz mérten túl nagy (nagyobb, mint $p + \lambda p$), vagy túl kicsi (kisebb, mint $|p - \lambda p|$), akkor a megszerkesztett két körnek nincs metszéspontja, és így nem jön létre a mértani hely (Apollóniusz-kör) pontja.

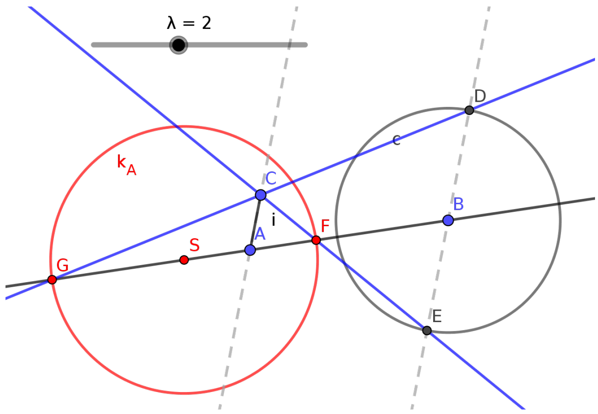
A másik interaktivitással kapcsolatban felmerülő kérdéskör a λ arányszám interaktív megváltoztathatósága. Az interaktív geometriai szoftverek, így a GeoGebra is rendelkezik olyan eszközzel (ún. csúszka), ami lehetővé teszi egy szám, szög változóként történő megjelenítését, amellyel meghatározható intervallumon belül meghatározható pontossággal interaktívan változtatható. Ha technikailag megoldható λ változtathatósága, akkor célszerű volna élni is vele, és olyan interaktív Apollóniusz-kört szerkeszteni, amelynek λ aránya változtatható. Ez a változó viszont még inkább érinti a klasszikus szerkesztési eljárás korábban is említett megszerkeszthetőségi kérdéskörét, lévén ha λ is változó akkor még nagyobb különbségek tudnak létrejönni, és még nehezebb olyan p tetszőleges távolságot választani, ami a mértani hely pontját tetszőleges λ esetén is szolgáltatja.

Ezt a tulajdonságot, hogy minden esetre a szerkesztés megoldást szolgáltasson nevezzük az interaktív szerkesztés univerzalitásának. Egy univerzális Apollóniusz-kör szerkesztésnek tetszőleges megadott különböző alappontpárra és tetszőleges λ pozitív, egytől különböző arányra egy megfelelő kört kéne adnia.

Szigorúan és szűken értelmezve ez nem tekinthető geometriai feladatnak a klasszikus geometria szempontjából, hiszen semmilyen korábbi feladatgyűjtemény, szakirodalom nem foglalkozik vele. Viszont vegyük figyelembe, hogy a probléma természete az interaktív geometria szoftverek megjelenését követően keletkezett csak, valamint a megoldására olyan geometriai megoldást keresünk, ami matematikai gondolkozást, problémamegoldást feltételez. E tekintetben mégis olyan matematikai jellegű kihívás, ami egy matematikus, egy matematikatanár számára érdekes lehet. Ha a tanár jó szemléltető eszközöket szeretne készíteni, akkor fel kell hogy legyen készülve ilyen jellegű problémák megoldására is. Ahogy az alábbiakban e példán is láthatjuk, az ilyen jellegű feladatok megoldása a matematikai problémák megoldásához hasonló. Jelen esetben is az általunk javasolt megoldási módok is túllépnek a papír alapú szerkesztés geometriai apparátusának keretein.

Habár a számítógépes szerkesztés során p-t is meg tudjuk választani csúszka segítségével és így minden alappontpáros és λ arányhoz tudunk olyan megfelelő p távolságot találni, ami metsző köröket szolgáltat, ahogyan azt a hagyományos, papír alapú szerkesztés során tettük, de ez nem szolgáltat nekünk univerzális Apollóniusz-kört. A megszerkesztett (λp és p sugarú) körök metszéspontjainak nyomvonalát ki tudjuk rajzoltatni p változtatásával, ami jó eszköze a mértani hely megsejtésének, de nem szolgáltat univerzális Apollóniusz-kört.

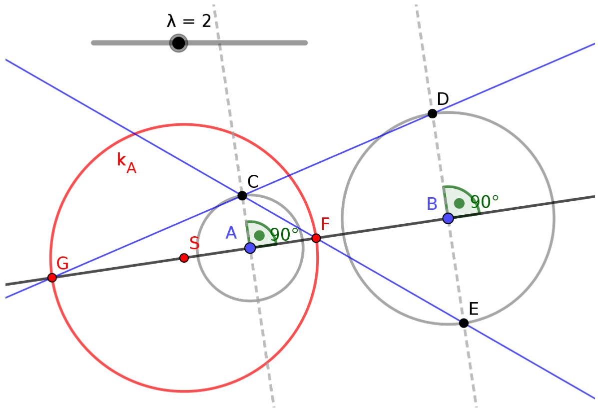
A probléma megoldásához – jelen esetben és gyakran általánosságában is – a bevett gyakorlattól gyökeresen eltérő megközelítést kell alkalmaznunk. Ennyiben is hasonlít ez matematikai problémák megoldásához. Az általunk bemutatott megoldások nyitja az, hogy az alappontok egyenesén keressük meg azokat a pontokat, amelyek az Apollóniusz-kör pontjai. Ezek a szimmetria okán meghatározzák e kör átmérőjét – ami viszont a kört is egyértelműen meghatározza.



5.1. ábra. Az Apollóniusz-kör szerkesztése hasonlóság alkalmazásával

Az első megközelítés a szintetikus geometria területéről a hasonlóságot alkalmazza. Ezt szemlélteti az 5.1 ábra. A célunk az A, B alappontok által meghatározott egyenesen megszerkeszteni azokat az F és G pontokat, amelyekre igaz, hogy az alappontoktól mért távolságaiknak az aránya az előre (csúszkával) megadott λ. Vegyük fel a C tetszőleges pontot. Az AC egyenessel párhuzamos B ponton áthaladó egyenest messük a B középpontú $\lambda|AC|$ sugarú körrel. Jelöljük ezek metszéspontjait D-vel és E-vel. Az AB egyenes CD-vel való metszéspontját jelöljük G-vel és az AB egyenes CE-vel való metszéspontját F-fel. Csúcsszögek lévén $|AFC\sphericalangle| = |BFE\sphericalangle|$ és váltószögek lévén $|CAF\sphericalangle| = |FBE\sphericalangle|$. Ezért $AFC_\triangle \sim BFE_\triangle$. A hasonlóság miatt $\dfrac{|BF|}{|AB|} = \dfrac{|BE|}{|AC|} = \dfrac{\lambda|AC|}{|AC|} = \lambda$. Hasonlóan csúcsszögek lévén $|AGC\sphericalangle| = |BGD\sphericalangle|$ és egyállású szögek lévén $|GAC\sphericalangle| = |GBD\sphericalangle|$. Ezért $GAC_\triangle \sim GBD_\triangle$. A hasonlóság miatt $\dfrac{|GB|}{|GA|} = \dfrac{|BD|}{|AC|} = \dfrac{\lambda|AC|}{|AC|} = \lambda$. Tehát az F és G pontok A, B alappontoktól mért távolságaiknak aránya λ, azaz az FG szakasz a keresett Apollóniusz-kör átmérője, aminek S középpontja az FG felezőpontja és sugara $|SF| = \dfrac{|FG|}{2}$.

A szerkesztés nem használja a „megfelelően” választott p távolságot, és így a megoldás nem esetleges, nem szükséges semmit sem utánaállítani, hogy látható legyen a megoldásunk. A megszerkesztett Apollóniusz-kör szinte minden esetre és helyzetben jól működik. Van azonban olyan eset is, amikor a szerkesztés továbbra sem szolgáltat megoldást. Jelen példánkban ezt a gondot egyelőre szándékosan hagytuk benne, hogy meg tudjuk mutatni az ilyen jellegű részproblémák megoldását is. A gondot az jelenti, hogy ha az alappontok változtatásával a C pont az AB egyenesre kerülne, akkor úgy nem szerkesztődnek meg az F és G pontok, és így az Apollóniusz-kör sem. Mivel a C pontot úgy kéne felvennünk, hogy az ne kerülhessen az AB egyenesre, ezért válasszuk azt egy az AB egyenesre merőleges, A ponton áthaladó egyenesen úgy, hogy annak A-tól mért távolsága sose lehessen 0. Ennek bebiztosításának érdekében legyen $|AC|$ valamilyen adott konkrét érték (pl. 1), vagy legyen az az AB szakasz hosszával megegyező (a definíció szerint A és B különböző). A részproblémát azért hagytuk meg, hogy megmutassuk, hogy a merőlegesség bevezetésére miért van szükség. A merőlegesség helyett igazából bármilyen tetszőleges nem 0 szöget is használhatnánk, de ezek közül a merőleges egyenes szerkesztése a legegyszerűbb (nem kell egy fölösleges, extra paramétert bevinnünk).



5.2. ábra. Az Apollóniusz-kör univerzális szerkesztése

A fenti eljárással (merőlegesen, nem 0 távolság felmérésével szerkesztett C pont) finomított szerkesztés immár teljesen univerzális, azaz tetszőleges A, B pontpárra és $\lambda \neq 1$ pozitív valós számra megszerkeszti a hozzá tartozó Apollóniusz-kört.

Az univerzális szerkesztés megoldásának másik megközelítése analitikus. Az ábrák szerinti F pontra igaz, hogy $\dfrac{|BF|}{|AF|} = \dfrac{B-F}{F-A} = \lambda$. E utóbbi egyenlőségből $F = \dfrac{1}{1+\lambda}B + \dfrac{\lambda}{1+\lambda}A$. Hasonlóan a G pontra azt kapjuk, hogy $G = \dfrac{1}{1+\lambda}A + \dfrac{\lambda}{1+\lambda}B$. A GeoGebra parancssorába ezen összefüggéseket (`B/(1+λ)+λ * A/(1+λ)` valamint `A/(1+λ)+λ * B/(1+λ)`) alakban beírva adott A, B és λ esetében megkapjuk az AB egyenes F és G pontjának megfelelő pontokat. Ezek után az Apollóniusz-kör megszerkesztése már a fentiek szerint egyszerűen befejezhető. A végrehajtott szerkesztés az előző módszerhez hasonlóan univerzális szerkesztést ad az Apollóniusz-körre.

Az ilyen univerzális szerkesztések felhasználhatóak ún. makrószerkesztések készítéséhez is. A makró ez esetben azt jelenti, hogy rögzített részletszerkesztési eljárás, azaz a példánk szerint két pont és egy szám megadása után szerkessze meg a hozzájuk tartozó Apollóniusz-kört. Ekkor nincs szükség az egész szerkesztési folyamatot teljes részletességgel végigfolytatni. Akkor hasznos ilyen makrókat használnunk, ha egy szerkesztésen belül többször is alkalmazunk egy szerkesztési folyamatot. A GeoGebrában ez az `Új eszköz létrehozása...` nevezett lehetőség, ahol ha valóban univerzális szerkesztést készítettünk, akkor az eredmény objektum (kimenő alakzat) kiválasztása után csak a szükséges alapadatok szerepelnek bemeneti alakzatként. Az így definiált eszköz a megadott bemeneti adatokhoz a makróban adott módon definiált kimenetet, eredményt szerkeszti meg egy lépésben (az Apollóniusz-kör univerzális szerkesztését makróként mentve olyan eszközt kapunk, ami két pontot kiválasztva és egy számértéket megadva megszerkesztődik a pontokhoz és a számhoz mint aranyhoz tartozó Apollóniusz-kör).

Az Apollóniusz-kör $\lambda = 1$-re nincs definiálva, az esetre (1-re) az AB szakasz felezőmerőlegesét kéne kapnunk. Megoldható a GeoGebrában, hogy a szakaszfelező merőlegest csak akkor mutassa, ha $\lambda = 1$. Megjegyezzük továbbá, hogy a GeoGebra (a parancssor `Ha` parancsa) segítségével olyan objektumot is létre tudunk hozni, ami $\lambda = 1$-re a szakaszfelező merőlegest adja, $\lambda \neq 1$-re pedig az Apollóniusz-kört, tehát azon pontok mértani helyét a síkon, amelyeknek két adott (különböző) ponttól mért távolságainak aránya adott pozitív szám. Az ilyen eszköz (makróként való) alkalmazása azt hozza eredményül, hogy nem szükséges külön szerkesztéseket alkalmaznunk az egyes esetekre, és univerzális szerkesztésű teljes megoldásokat tudunk készíteni λ értékétől függetlenül.

Ahogyan a szerkesztések univerzalitását szemléltető példánkból is jól látható, az univerzális szerkesztés kivitelezéséhez elképzelhető, hogy az eredeti, hagyományos papír alapú megoldáshoz használt geometriai eszközök helyett más, az alapmegoldás eszközeihez szorosan nem is kapcsolódó geometriai eszközöket, ismereteket kell alkalmaznunk, és az univerzális megoldhatóság kihívása a geometria, matematika látszólag össze nem kapcsolható területeit köti össze. Egy szerkesztés univerzalitását biztosító folyamat, eljárás felfedése egy feladat megoldhatóságához, megvitatásához hasonló intellektuális kihívás, aminek szerteágazó kapcsolati hálója mélyebb összefüggések felfedezését motiváló eszköz lehet. Véleményünk szerint egy alap- vagy középiskolás diáknak nem okvetlen kell ezzel a jelenséggel megbirkóznia (habár a tehetséggondozásban már szerepet kaphat), de a leendő matematikatanárok képzésében meg kéne már ennek a fenoménnak jelennie, hogy adott esetben tudjanak létrehozni univerzális szerkesztéseket.

5.6. A gyakorló feladatok szerepe a matematika és a geometria oktatásában

A dolgozat első részében részletesen foglalkoztunk az elmúlt pár évtized szlovákiai tantervi változásaival. Azok alapján látható, hogy a matematika kötelező óraszámainak csökkentésével nem csökkent arányosan a tananyag mennyisége (sőt egyes területek kiemelt, magas óraterheléssel jelentek meg). Mivel ezen körülmények között a tanár igyekszik az előírt tananyagot átvenni félő, hogy ennek következtében olyan területeken „spórol" időt, ami számunkra és a matematikaoktatás jövője szempontjából nem a legkifizetődőbb. A geometria, főleg a szerkesztési geometria ilyen szempontból veszélyeztetett – ahogy arról már korábban szót ejtettünk – hiszen az átfogó és mérvadó országos felmérésekben ez jelentősen alulreprezentált. Potenciális kritikus területe a matematika oktatás folyamatának azonban a gyakorlás is, hiszen a tanár abbéli igyekezetében, hogy minden előírt tananyagot átvegyen, ezért az egyes tananyagokhoz és az adott diákjaihoz nem a kellő mennyiségű, mélységű és megfelelő struktúrában felépített feladatsorokkal gyakoroltatja be azokat.

A matematika oktatásának módszertanával foglalkozó egyes szakirodalmak pl. (Hejný et al., 1988) rámutatnak, hogy a matematikai ismeretek megértésén felül rendkívül fontos szerepet játszik az adott ismeret feladatokkal történő begyakorlása, rögzítése. Hiába tudja a diák a vonatkozó elméleti matematikai ismereteket (pl. Pitagorasz-tételét), ha azokat nem tudja a gyakorlatban, feladatmegoldás során alkalmazni. A tanítási-tanulási folyamatnak ezért fontos részét kell képeznie olyan feladatok, feladatsorok oldása és ezáltal annak begyakorlása, melyek által a megszerzett ismeretek rögzülnek.

Ez a típusú gyakorlás egyrészt individuálisan szubjektív, másrészt általában véve időigényes. Az individuálisan szubjektív alatt azt értjük, hogy nem minden tanuló, diák, hallgató számára ugyanannyi és ugyanolyan feladat megoldása vezet célra. Egyeseknek kevesebb, másoknak több feladat szükséges ugyanannak az ismeretnek az alapos begyakorláshoz. Ez egyrészt függ a diák képességeitől, korábbi matematikai ismereteitől és előképzettségétől, másrészt megfelelő feladatmegoldó stratégiák, sémák ismeretétől is.

Ezeket jelenleg effektíven felmérni egy képzett és felkészült matematika-tanár tudja, de ez ugyancsak munka- és időigényes feladat. Csak a diák(ok)kal közösen végzett, vagy a tanár felügyelete alatt a diák(ok) által végzett feladatmegoldás során detektálhatóak azok a deformitások, a diák helytelen ismereti, kapcsolati vagy gondolkodási szintű hibái, amelyek korrekciója nélkül a diák az adott feladathoz hasonló feladatok helyes megoldására képtelen lesz. A diák eredménytelensége egy felsőbb matematikai feladat során (pl. egy deriválás) gyakran alapismereti okokra vezethető vissza (pl. nem tudja, vagy nem tudja alkalmazni a hatványozásra vonatkozó összefüggéseket, a törtekkel való műveleteket stb.), de lehetséges, hogy nem ismeri, vagy nem helyesen ismeri az egyes fogalmak közötti kapcsolatokat (pl. az érintő-egyenes ábrázolása során az egyenes analitikus felírása és a lineáris függvény grafikonja közötti kapcsolatot), vagy hogy a diák gondolkodása során nem konzekvens, logikus lépéseket követ, vagy éppenséggel nem ismeri az adott feladattípushoz kapcsolódó megfelelő feladatmegoldási stratégiákat, gondolkodási sémákat.

A diagnosztikát követően célzottan lehet a diák ismereti deformitásait korrigálni. A tanár személyre szóló szintfelmérését követően egy jó tanár a minden egyes diákjának olyan optimális nehézségű feladatokat tud választani, ami fenntartja a diák érdeklődését, kihívást jelent számára, de a megoldhatóság, teljesíthetőség miatt sikerélményt is nyújt a megoldónak. Ezen elméleti, idealizált folyamat azonban nehezen valósítható meg egy heterogén, legalább 30 fős osztályteremben.

Ennek megoldása tehát minél több gyakorlati, feladatmegoldó órát követelne, azonban ennek keretei adottak a tantervekben. Így aztán a diákok gyakorlásra gyakran házi feladatokat kapnak. Ha azokat valóban megoldanák, sikeresen be tudnák az adott tananyagot gyakorolni, viszont a tapasztalatok azt mutatják, hogy a diákok nem kellően motiváltak házi feladatokat oldani. Hogyan vegyük rá a őket, hogy önállóan házi feladatokat oldjanak? Sajnos erre egyértelmű működő recepttel nem tudunk szolgálni. A füzetek beszedése, ellenőrzése rendkívül munka- és időigényes, s nem is számít korszerűnek. Azt várjuk el, hogy a diáknak kész legyen a házi feladata, vagy hogy valóban gyakoroljon? Ha minden diák füzetében ott lesznek megoldva a feladott feladatok, akkor az eredménynek számít, és attól a feladatmegoldó képessége valóban jobb lesz? Ha ugyanezt elektronikusan kérjük beadni, vagy akár valamilyen oktatástámogató keretrendszeren keresztül, akkor mennyiben más a helyzet?

Az előző provokatív kérdéseink kapcsán próbáljuk meg megfogalmazni, hogy a modern infokommunikációs lehetőségek közül milyen lehetőségeink volnának, és legfőképp, hogy mik volnának a velük szemben támasztott elvárásaink. A feladatok gyakorlásának időigényessége, mint sarkalatos pont, a fő kérdés. Nagyobb felhasználói bázis esetén kifizetődő lehet nagyobb időbefektetést áldozni egy megfelelő rendszer kialakítására, ha a kiértékelési oldalon ezzel időt tudunk nyerni.

A leírtak alapján megpróbáltuk kimondani, hogy milyen általános elvárásokat tudnánk megfogalmazni a feladatok gyakorlásával kapcsolatban (Csiba, 2018a) :

1. legyen a diáknak a tanórán felül is lehetősége olyan feladatok megoldására, amelyek által be tudja gyakorolni a megszerzett ismereteket,
2. a feladatok hasonló jellegűek, de ne azonosak legyenek,
3. a megoldás helyességéről kapjon a diák lehetőleg azonnali visszajelzést,
4. helytelen megoldás esetén legyen lehetősége a diáknak javítani,
5. elakadás vagy sikertelen próbálkozás után a diák kapjon a megoldáshoz ötletet, megoldási javaslatot,
6. adott esetben a részfeladatok megoldásai is értékelődjenek,
7. a kezelőfelület legyen platformfüggetlen és online elérhető,
8. a feladatokat a diáknak lehetőleg magának kelljen megoldania,
9. a tanár tudja ellenőrizni a diákok előrehaladását.

A tanórákon végzett gyakorlásokon felül hagyományosan a házi feladatok tudták betölteni a feladatmegoldás begyakorlását. Ehhez azonban egyrészt megfelelő példatárak kellenének, vagy olyan tankönyvek, amelyek kellően sok alkalmas feladatot tartalmaznak, másrészt a megoldások helyességének ellenőrzése – ahogy már említettük – szintén időigényes folyamat. A megfelelő tankönyvek kiadása a szlovákiai közoktatási reformok bevezetését általában jelentős késéssel követte csak. Alkalmas, iskolai gyakorlatban használható, a tananyaghoz illeszkedő feladatgyűjtemények pedig meg sem találhatóak a tankönyvpiacon. A magyar tannyelvű iskolák esetében a késést meghosszabbította az is, hogy azok az államilag jóváhagyott tankönyveknek a magyar nyelvre történő fordítását követően jutottak csak el a végfelhasználókhoz, azaz a tanárokhoz és a tanulókhoz vagy diákokhoz.

Az info-kommunikációs lehetőségek fejlődése és elterjedése folytán az internet-elérés és így a különböző online keretrendszerek elérhetősége is egyre szélesebb rétegek számára vált hozzáférhetővé.

A megfogalmazott elvárásainknak megfelelően lehetőséget kéne biztosítanunk, hogy a tanulók vagy diákok a tanórán kívül is lehetőséget kaphassanak a feladatok gyakorlására. Felgyorsult világunkban ha csak a következő órán derül ki, hogy helytelen volt a megoldás, az nem biztos, hogy kellően motiválja a diákot, hogy újra önállóan megoldja. Megfelelő, jelenleg is elérhető info-kommunikációs alkalmazásokat használva képesek lehetünk olyan tananyagokat készíteni, amelyek a feladatmegoldás eredményeit valós időben ki tudja értékelni, és ezáltal azonnali visszajelzést ad a felhasználónak (Csiba, 2018b). Ezen alkalmazások segítségével lehetséges az eredmények kiértékelése és elfogadása annak alakjától függetlenül. A $0,5$, a $0,4\overline{9}$ az $\frac{1}{2}$, a $\frac{3}{6}$, a $\sin 30^\circ$ és a $\sin\frac{\pi}{6}$, stb. ugyanannak a számnak más alakjai, reprezentációi. Igazságtalan és nem korrekt volna, ha ezek közül csak az egyiket fogadnánk el helyes megoldásként. Az oktatástámogató keretrendszerek (mint pl. a legelterjedtebb Moodle is) korábban csak egy előre megadott válaszlehetőséget tudott elfogadni. Mostanra viszont elérhetőek olyan speciális keretrendszerek (mint pl. a WeBWorK), vagy az erre natívan képtelen keretrendszereknek olyan bővítményei (mint pl. a STACK), amelyek ennek kezelésére beépített számítógépes algebra rendszert használva a különböző alakban megadott azonos értékeket kezelni tudja, s nemcsak numerikus, de szimbolikus esetekben is (pl. a konstanssal eltolt primitív függvények esetében).

A fenti felsorolás elvárásai közül annak a bebiztosítása a legnehezebb, hogy a diák saját maga oldja meg a kitűzött feladatokat. Ez azonban a hagyományosan kiosztott házi feladatoknál is fennállt. Hogy ne csak másolássá váljon a feladatmegoldás, lehetőségünk van olyan feladatok létrehozására is, ahol a feladat véletlen változókkal parametrizálható. Például egy megoldandó egyenlet, vagy egyenletrendszer együtthatói valamely általunk meghatározott intervallumból, vagy halmazból származó számok közül generálódnak ki. Így minden diáknak ugyanolyan feladata van, azok azonban mégsem azonosak.

Végezetül pedig véleményünk szerint a tanárnak célszerű volna kialakítania valamilyen olyan motivációs rendszert, amivel rá tudja venni a tanítványait a kialakított feladatok megoldására.

Ne feledkezzünk meg azonban arról sem, hogy ilyen elvárásoknak megfelelő online feladatsorok létrehozása speciális jártasságokat igényel és időigényes is. Az értékelési részében viszont a befektetett energia meg tud térülni, valamint a kész feladatsorok több éven keresztül használható és hasznos kiegészítője tud lenni az oktatási folyamatnak.

5.7. Automatikusan kiértékelődő geometriai szerkesztési feladatok és azok alkalmazása oktatási keretrendszerekben

Az automatikusan kiértékelődő online matematikai teszek lehetőségei (Csiba, 2018a) közül kutatásaink alapján meglehetősen kevés alkalmas geometriai szerkesztési feladatok kezelésére.

A *WeBWorK* egy önálló, webes alapú, kimondottan matematikai házi feladatokat kezelő rendszer, ami a diák számára parametrizálható véletlenszerű feladatokat tud felkínálni, amit az Amerikai Matematikai Szövetség is támogat (a projekt hivatalos oldala: http://webwork.maa.org/). A WeBWorK-höz egy meglehetősen nagy feladatbank szabadon elérhető (Open Problem Library), de saját feladatokat is tudunk készíteni, ehhez viszont ennek a Perl programozási nyelv alapú programnyelvét kell ismerni. A rendszer a diáknak a feladat leadása után azonnali visszajelzést ad, a tanár pedig nyomon tudja követni, hogy diákjai hogyan teljesítették a feladataikat. A háttérben természetesen CAS szintű megoldás-ellenőrzés zajlik, azaz a rendszer képes automatikusan megállapítani, hogy a megadott megoldás helyesnek tekinthető-e.

A WeBWorK keretrendszer elvileg alkalmas appletek integrálására és így akár geometriai feladatok is használhatóak lennének benne, de a feladat létrehozása meglehetősen körülményes, hosszadalmas és igényes (a Perl programnyelv alapos ismerete volna szükséges hozzá).

A *GeoTest* egy Drupal CMS alapú, egyedi fejlesztésű weboldal, amelyen beágyazott GeoGebra appletek segítségével geometriai szerkesztési feladatok oldhatóak. A portál fejlesztői és szerkesztői Šárka Gergelitsová és Tomáš Holan üzemeltetik a http://geotest.geometry.cz címen elérhető weboldalt. Az érdeklődők számára ajánljuk a (Gergelitsová & Holan, 2012) és (Gergelitsová & Holan, 2016) irodalmakat.

Tanárként e-mailben lehet a portálhoz hozzáférést kérni. A tanár aztán saját osztályokat és diák felhasználói fiókokat, valamint a számukra határidőhöz kötött feladatsorokat tud létrehozni a csaknem ezer geometriai feladatból. A diák a feladat leadását követően visszajelzést kap a megoldás helyességéről, azaz a beépült GeoGebra appletben elvégzi a feladatban elvárt objektum megszerkesztését, megfelelően elnevezi azt, majd a leadás gombbal leadja azt. A nem helyesen megoldott feladatoknál addig próbálkozhat, míg sikeresen meg nem oldja. A tanár egy áttekintő táblázatban látja, hogy a diákjai hogyan teljesítették az egyes feladatokat. Geometriai feladatok gyakorlására elvileg tökéletesen megfelel a rendszer az elvárásainknak, viszont az egyedi fejlesztésnek köszönhetően csak cseh, illetve szlovák nyelven érhető el (a diákok kezelőfelülete és a feladatok cca. negyede együttműködésünknek köszönhetően használható magyar nyelven is a http://geotest.geometry.cz/?lang=HU címen). Másrészt a meglévő feladatbank kötött, saját feladatok nem hozhatók létre, bár a fejlesztők nyitottak egyeztetés után a feladatbank bővítésére.

Kutatásaink alapján nem találtunk egyéb kész, használható lehetőségeket automatikusan kiértékelődő geometriai tesztek készítésére. A fenti lehetőségek is azonban GeoGebrával készült appletek beágyazásával valósítják meg azt. Ezért merült fel bennünk, hogy tudnánk-e a GeoGebra appletjeit saját, könnyebben kivitelezhető módon automatikusan kiértékelődő geometria feladatok megoldásának ellenőrzésére használni házi feladatokat kezelő keretrendszerben?

Az alábbiakban vázolt kivitelezési mód két olyan megvalósítási mód, eljárás összekapcsolásával jön létre amelyeket összekapcsolva másutt még nem láttunk. Ezek közül az egyik az automatikusan kiértékelődő feladatot oldja, ellenőrzi, a másik pedig ennek beágyazását biztosítja a Moodle keretrendszerbe.

5.7.1. Automatikusan kiértékelődő applet készítése

Az automatikusan kiértékelődő geometriai feladat appletjét egy Java-szkript segítségével tudjuk megvalósítani. A GeoGebra Java nyelven megírt program, ami képes a programon belül is Java-szkriptek futtatására is. Az az alapfeladat, és java szkript, ami számunkra is a kezdőlökést megadta, azt Michael Borcherds, a GeoGebra szoftverfejlesztési koordinátora tette közzé Automatic checking example cimmel appletként, lásd a (Borcherds, 2014) címen. Az alább közölt szkript (kódrész) ennek egy kissé módosított változata.

Az elérendő cél az volna, hogy egy általunk megszerkesztendő objektum (pont, egyenes, kör, …) az appletben történt megszerkesztésekor a szoftver automatikusan jelezze, értékelje a sikeres szerkesztés megtörténtét. Ehhez természetesen tudnunk, és előre definiálnunk is kéne a feladatban megadott megoldást. Ezt az objektumot szerkesszük vagy vegyük fel, nevezzük el `cel`-nek és hogy ne legyen látható rejtsük is el. A feladat megadásához szükséges objektumokat vegyük fel és a feladat meghatározását is szövegként jelenítsük meg. A többi, nem szükséges objektumot ajánlott elrejteni, hogy ne zavarja meg a feladatmegoldót. Végezetül pedig vegyünk fel egy szöveget, ami a visszajelzést adja sikeres megoldás esetén (pl.: Gratulálunk!, Helyes! vagy Sikeres megoldás! stb.), és ezt az szövegobjektumot nevezzük el `eredmeny`-nek.

Valamilyen objektum tulajdonságainak beállításai között a `Script` fül (tab) a `Globális JavaScript` fülén beillesztünk egy, az alábbiakban látható szkriptet:

```
function ggbOnInit() {
ggbApplet.debug("ggbOnInit");
ggbApplet.registerAddListener("newObjectListener");
}
function newObjectListener (obj) {
if (obj != "finished") {
var cmd = "finished = ("+obj+"== cel)";
ggbApplet.debug(cmd);
ggbApplet.evalCommand(cmd);
finished = ggbApplet.getValueString("finished");
```

```
if (finished.indexOf("true") > -1) {
ggbApplet.setVisible("eredmeny",true);
}
}
}
```

A fenti szkript a létrehozott appletben az első felvett vagy megszerkesztett objektum után létrehoz egy `finished` logikai változó objektumot, aminek az értéke akkor lesz igaz ("true"), ha valamely létrehozott új objektum (`obj`) azonos az általunk definiált `cel` célobjektummal. Amennyiben ez megtörténik – tehát meg sikerült szerkeszteni a feladatban elvárt objektumot – az `eredmeny` szöveges visszajelzés láthatóvá válik.

Ha konkrét példán szeretnénk bemutatni a működést, akkor legyen a feladat egy háromszög köré írt körének a megszerkesztése.
Habár felvehetnénk először egy tetszőleges háromszöget is, amihez megszerkesztenénk a megoldást, de egyszerűbb előbb a megszerkesztendő kört felvennünk, amelyen felvennénk három pontot, amelyek a feladat háromszögének csúcsai lesznek. A kört nevezzük át `cel`-nak. A kört, a középpontját és meghatározó kerületi pontját is rejtsük el! Vegyük fel a csúcsaival meghatározott háromszöget, illetve láthatóan hozzunk létre egy szövegmezőt, amiben a feladatmeghatározást tüntetjük fel. Egy másik szövegmezőt Sikerült! tartalommal (legyen kellően nagy és színes) nevezzünk el `eredmeny`-nek, majd a megadott helyre illesszük be a fenti szkriptet. Az állomány mentése után a belőle készült applet a `Fájl` menüből közvetlenül publikálható és közzétehető a geogebra.org oldalon vagy exportálható weblapként (html formátumban).

A bemutatott szkriptes megoldás előnye, hogy nem kell a megoldást megfelelően elnevezni és leadni (a GeoTest oldalon így működik).

Azok számára, akik nem rendelkeznek programozási ismeretekkel a bemutatott módszer megfelel arra, hogy a fent leírt módon maguk is létre tudjanak hozni egy automatikusan kiértékelődő appletet a GeoGebra segítségével. A programozásban járatosabbak a szkript módosításával akár a feladat egyes részfeladatai is kiértékelődhetővé tehetőek.

A GeoGebra elképzelhetően tervezi is a gyakorlatok automatikus ellenőrzésének a lehetőségét, hiszen a https://wiki.geogebra.org/en/Reference:GeoGebra_Apps_API#Miscellaneous oldalon ez mint beta tesztelés alatt álló funkciók szerepelnek (lásd még az ezzel készült gyakorlatot a https://dev.geogebra.org/examples/html/example-exercise.html címen).

5.7.2. Az eszköztár testreszabása

A GeoGebra megjelenő eszköztárainak kialakítása megváltoztatható. Ahogy láthattuk a 137. oldalon létre tudunk hozni új eszközöket, de azokat a meglévő eszköztárban is el tudjuk helyezni az `Az eszköztár testreszabása` menüpontban. Agy adott feladatot tartalmazó appletben azonban felmerülhet, hogy a teljes eszköztárat meg kell-e vajon jelenítenünk a feladatmegoldónak? A kérdés megvilágításához egy konkrét feladatot hoznék fel példának: Szerkesszük meg azt a kört, ami áthalad két adott ponton és érint egy adott egyenest! E feladat egy típuspélda a pont körre vonatkozó hatványának alkalmazására, azonban a standard eszköztárban megtalálható parabola felvételével (ami nem euklideszi szerkesztés, azaz körző és vonalzó segítségével nem megrajzolható) a feladat megoldható, hiszen a parabola olyan mértani hely, ami azon pontok halmaza a síkon, amelyek egy adott ponttól és egy adott egyenestől azonos távolságra fekszenek. Ez esetben kérdéses egyrészt az, hogy azt a pont körre vonatkozó hatványa, mint tanult, gyakorlásra szoruló tananyag segítségével akarjuk-e megoldatni? Másik szempont, de szintén jogos felvetés, hogy vajon euklideszi szerkesztéssel akarjuk-e a megoldatni a feladatot?

Ilyen esetekben célszerű lehet testre szabni az eszköztárat és abból a nem kívánt eszközöket szándékosan kivenni, hogy a feladatmegoldó csak azokat a szerkesztési eszközöket használhassa amelyet engedélyezünk neki.

Egy másik gyakorlatias szempont az, hogy az eszköztárban találhatóak olyan eszközök is, amelyekre biztos nem lesz a feladatmegoldónak szüksége (pl. szinte biztosak vagyunk benne, hogy nem akar majd képet beszúrni, ...). Ezért az eszköztárból ezen eszközöket kivehetjük, már csak azért is, hogy a feladatmegoldó figyelmét ne osszuk meg, s ne vesszen el az eszközök választásában, hanem teljes egészében a feladatra tudjon koncentrálni.

Az eszköztár egyszerűsítésének szinte szélsőséges példája, amikor egy pont felvételén, metszéspont kijelölésén, egyenes felvételén és körző használatán kívül nincs más eszközünk az eszköztárban. Ezen eszközök elégségesek az úgynevezett euklideszi szerkesztésekhez, azokhoz a szerkesztésekhez, amelyeket a geometriában megszerkeszthetőnek tartunk, és csak körző, valamint egyenes vonalzó segítségével megoldhatóak. Az ilyen jellegű probléma-felvetést Jiří Vaníček, a Dél-Csehországi Egyetem oktatójától hallottuk egy bő másfél évtizede (Vaníček, 2010), s azóta mi is többször vizsgáltuk már az általa felszínre kerülő jelenségeket. Meglepő az ilyen eszköztárú szoftverek, appletek tanórai alkalmazása mind általános iskolai, mind akár egyetemi környezetben. Ilyen feladatok a szakaszfelező pont, vagy egy adott ponton áthaladó, adott egyenesre merőleges egyenes megszerkesztése az euklideszi szerkesztések fenti, minimalista eszköztárának a használatával.

Vaníček kolléga felvetését 2003-ban számítógépes tanteremben vizsgáltuk, a felügyeletet pár ötödéves matematika tanári szakos hallgató jelentette. Meglepődve vettük észre, hogy hamarosan a hallgatók egy nem foglalt számítógép körül csoportosultak, és hangosan vitatkozva igyekeztek a feladatokat oldani. Saját megfigyeléseink 2003-ból és az elmúlt pár évből is azt mutatják, hogy a mesteri szintű matematika tanári szakos hallgatók számára sem okvetlen evidencia ezen alapszerkesztések gyors és korrekt megoldása.

Habár az összes megszerkeszthető geometriai szerkesztés ezen eszközök alapszerkesztéseiből épül fel tulajdonképpen, mégis előfordul, hogy ezen alapszerkesztéseket a diákok kevésbé ismerik. Ehhez nyilván hozzájárul az is, hogy mire tanít minket az iskola (mi szerepel a tananyagban?, mit tanít a tanár?): a merőleges szerkesztéséhez ott van a karcos háromszögvonalzó, a párhuzamos egyeneseket meg vagy két háromszögvonalzó csúsztatásával tanítjuk meg, vagy a merőlegesre állítunk újra merőlegest. Ezen effektív módszerek hatékony megtanításával, és feladatokban történő alkalmazásának begyakorlásával elérjük, hogy azok olyannyira rögzüljenek, hogy a kialakított sémákból szinte ne is tudjon a diák, hallagató kilépni, és akár az alapvető euklideszi alapszerkesztési feladatokat se tudja könnyedén euklideszi eszközökkel megoldani.

Az euklideszi szerkesztések eszköztárától még karcsúbb a Mohr-Mascheroni-féle szerkesztéseké. Az előbbiek esetében ugyebár olyan szerkesztésekről van szó, amelyek csak körző és egyenes vonalzó segítségével megszerkeszthetőek, míg a Mohr-Mascheroni tétel értelmében minden, ami euklideszi szerkesztéssel megszerkeszthető, az megszerkeszthető csak körző segítségével. Ezért a Mohr-Mascheroni-féle szerkesztésekhez olyan eszköztárat tudunk létrehozni, ami csak a Pont, Metszéspont, Kör középponttal és kerületi ponttal és Körző eszközöket tartalmaz és egy ilyen eszközöket tartalmazó felületen kell megszerkeszteni például két adott pont birtokában egy négyzet további két csúcsát.

5.7.3. Véletlenszerű feladatmeghatározás készítése

A 139. oldalon megfogalmazott elvárásaink között szerepelt, hogy ne statikusan ugyanazt a feladatot kapják a diákok, hanem ha a megoldandó feladat tk. ugyanaz is, az legalább ne ugyanúgy nézzen ki. Ha konkrét példával szeretnénk ezt szemléltetni, akkor a feladat legyen a korábban már említett automatikusan kiértékelődő feladat: Szerkesszük meg az ABC háromszög köré írt kört! Ha mindenki ugyanazt a feladatmeghatározást, ugyanazt az ABC háromszöget kapja, akkor ezzel diákjainkat másolásra késztetjük csak. Ez ellen úgy tehetünk, hogy a bemeneti változókat (jelen esetben az A, B és C pontok helyzetét) úgy vesszük fel, hogy azok minden appletben más háromszöget adjanak.

A probléma nem tűnik túl komplikáltnak, hiszen a parancssor parancsai közül a `VéletlenPont` parancs három külön szintaxisa által is véletlenszerű pontokat tudunk felvenni. A gond azzal van, hogy mi van, ha a három véletlen pont véletlenül egy egyenesre esne – akkor a feladat nem megoldható. De hasonlóan problémás, ha a háromszög kilóg a munkaterületről, túl „nagy”, túl „kicsi”, túl „hegyes” vagy túl „tompa”. Ezekben az esetekben a háromszög méretezése vagy alakja nehezíti a szerkesztési folyamat sikeres megvalósítását az applet munkaterületén.

A megoldandó probléma tehát az, hogy a feladat meghatározó alapobjektumait úgy válasszuk meg véletlenszerűen, hogy az nem elfajuló, jól látható, és az applet munkaterületén garantáltan elférő legyen, sőt ajánlott volna, hogy a segédszerkesztések is elférjenek az általunk megadott munkaterületen.

Ezen problémák elhárítását különféle kreatív módszerekkel tudjuk elérni. A példánk háromszög csúcsait például egy előre felvett köríven veszem fel, így garantálva, hogy a munkaterület közepén és mekkora méretű háromszög (és persze köré írt kört) vevődjön fel. Az egyik csúcs legyen e körív véletlen pontja, a másik kettő pedig e csúcs a kör középpontja körül véletlen nagyságú szöggel elforgatott képe. Az elforgatás véletlen szögét csúszkával felvéve megadhatjuk annak alsó és felső korlátjait (pl. 30° és 160°), így biztosítva, hogy a véletlenszerűen felvett háromszög ne legyen túl „hegyes" vagy túl „tompa". Ez a bemutatott eljárás csak egy a lehetséges módok közül és nem „a" kivitelezési mód. Az erre megfelelő módszer megtalálásához hasznos a szoftver lehetőségeinek alapos ismerete, valamint a példánkban is szereplő trükkök ismerete is segíthet, de véleményünk szerint ez alapvetően egy kreatív feladat, ami a jelenlegi geometria-oktatásnak nem képezi a részét.

5.7.4. Matematikai házi feladatok kezelésének lehetőségei a Moodle keretrendszerben

Dacára annak, hogy a GeoGebra Java programozási nyelv alapú szoftver mégis az appletek weboldalakon való megjelenítésével már pár éve nincs gond, annak köszönhetően, hogy alapértelmezetten a html5-ös leíró nyelvben és nem java-appletként mentődik le és jelenítődik meg. A GeoGebrával készített appletek legegyszerűbben, közvetlenül a szoftverból a Fájl menü `Publikálás` menüpontjával a szoftver weboldalának kimondottan erre létrehozott részén tehetők fel az internetre a (geogebra.org/materials) és igény szerint oszthatóak meg linkkel vagy nyilvánosan. Az elkészített anyagok beágyazása weboldalakra, webes tartalomkezelő portálokra (pl. Joomla, WordPress, ...) és oktatáskezelő keretrendszerekbe (Learning Management System a továbbiakban csak mint „LMS"), mint pl.: Moodle, Canvas, ... a GeoGebrából a .html-be készített export avagy a GeoGebra oldalán általunk nyilvánosan publikált applet, link is beilleszthető, beágyazható.

Joggal merülhet fel a kérdés: Kell-e nekünk ennél több? A tananyag bemutató, szemléltető részeit így is meg tudjuk online osztani – de ugyanígy annak leíró részeit is – a tanítványainkkal, de a a potenciálisan érdeklődőkkel is.

Ahogyan már azt korábban kifejtettük, véleményünk szerint a tanulási folyamatnak meghatározó részét képezi a megtanultak begyakorlása, az ismeretek rögzítése. Ezt a matematikában feladtok megoldásával szoktuk általában megvalósítani, mind a szervezett képzés keretein belül, mind pedig házi feladatok segítségével. Ez utóbbiak ellenőrzése szintén fontos tevékenység, hiszen így tudunk effektíven megbizonyosodni arról, hogy a tanuló valóban érti-e a tananyagot és képes-e a kapcsolódó feladatok megoldására. Mivel ez időigényes feladat és az oktatásra szánt kontaktóra-keret nem biztosít lehetőséget a tanárnak sok esetben ennek elvégzésére, ezért más kivitelezési módot kell ilyen esetekben keresnünk. Sajnos a GeoGebra portálján közzétett feladatok gyakorlásra megfelelőek, és jól összeállított applet esetén a gyakorlónak azonnali visszajelzést is tud adni (lásd az előző alfejezeteteket), azonban az ellenőrzés elvégzésére ez a felület nem alkalmas.

Ilyen célra megfelelőek tudnak lenni elvileg az LMS-ek. Az online oktatáskezelő keretrendszerek reneszánszukat élik. A kétezres évek elején történő megjelenésüket követő kezdeti fellángolás után rá kellett döbbennünk, hogy nem csodaszerek, s nem oldják meg az elektronikus kurzusok az oktatás minden korábbi problémáját. Egy évtizede az első fellángolás tapasztalatait felhasználva álltak rá Amerikában ilyen rendszerek tömeges használatára, így születtek meg a Massive open online course kezelő rendszerek, mint pl. a Coursera, az edX, a Canvas Network, amelyek ezreknek kínálnak kurzusokat. A helyén kezelve az LMS lehetőségeit de hátulütőit is hasznos segédeszköz lehet belőle egy felkészült oktató kezében. Jelen viszonylatban mi azonban olyan rendszert kerestünk, ahol a mi saját feladatainkat tudjuk menedzselni és kínálni a saját diákjainknak, hallgatóinknak. Az LMS rendszerek közül Közép-Európában a Moodle a legelterjedtebb, a piacvezetők közül a Canvas nálunk kevésbé ismert, a Blackboard fizetős. Részben ezért fogunk a Moodle-val foglalkozni, részben pedig azért, mert megoldási javaslataink, tapasztalataink is vele vannak.

A mi nézőpontunkból, azaz a 5.6 fejezetben megfogalmazott elvárásoknak megfelelő matematikai házi feladatok kezelésére megállapíthatjuk, hogy a natív Moodle rendszer lehetőségei nem kielégítőek. Képesek vagyunk teszteket készíteni benne, de azok statikus, azonos feladatokat tartalmaznak (az ún. számjegyes feladattípus), vagy ha lehetőségünk is van véletlenszerűen generálódó paramétereket alkalmazni a feladatokban és az eredményekben (az ún. egyszerű számításos, számításos, számításos feladatválasztós feladattípusok), de azokkal a rendszer által végzett műveletek nem tökéletesek (pl. ha a megoldás egy paraméter értékének a kétszerese, akkor ezt a kétszeres értéket mutassa a feladatválasztós esetben, ne pedig azt, hogy 2-szer a paraméterérték). Egy másik szempont számként megadható eredmények esetében, hogy azokat fogadja el akkor is, ha más alakban, reprezentációban vannak a feladatmegoldó részéről megadva. A natív Moodle kérdésekben meg kell adnunk a helyes választ (vagy válaszokat), és az (vagy azok) csak akkor kerül elfogadásra, ha ebben az alakban adja le a feladatmegoldó. Ennek kezelésére célszerű volna olyan számítógépes algebra rendszert (CAS) alkalmazni, ami ezen különböző alakban megadott azonos értékeket kezelni tudja, s nemcsak numerikus, de szimbolikus esetekben is (pl. a konstanssal eltolt primitív függvények esetében).

Kifejezett online matematikai feladatok kezelésére készült csomag (Moodle plugin) a STACK. A STACK a maxima ingyenes CAS-t használja, ezért aztán szintaktusának ismerete szükséges a feladatszerkesztő tanárnak, akárcsak a szépen formázott képletek miatt a TeX tipográfiai rendszer szintaktusának az ismerete is. A plugin beépülésének köszönhetően a Moodle tesztjeihez használt kérdésbank kérdései között hozhatók létre a feladatok. Az itt elkészített feladatok visszajelzést is adnak a feladatmegoldónak, s nemcsak a feladat leadása után, hanem akár a feladatmegoldás során is. Az útmutatók, tippek és a mintamegoldások szépen formázott matematikai szövegként tudnak megjelenni. A projekt dokumentációs weboldala a https://stack2.maths.ed.ac.uk/demo/question/type/stack/doc/doc.php/ címen érhető el. Sajnos nem találhatóak nyilvánosan elérhető kérdésbankok hozzá, pedig egy jó mintapélda gyakran több segítséget tudna nyújtani, mint egy leírás.

A WeBWorK-ről már korábban szót ejtettünk (lásd a 5.7 fejezetet), s habár önálló rendszer, modulként beágyazható a Moodle-ba is, azaz az ott közzétett tananyagban az után belinkelhető a hozzá készített WeBWorK-ös feladatsor. A beágyazásnak köszönhetően nincs szükség további autentifikációra és közvetlenül a Moodle-ben is megtekinthetőek az eredmények.

Szintén jól használható matematikai és természettudományos feladatok kezelésére készült szoftvercsomag a Wiris, ami a Moodle-be könnyen, pluginként integrálható (a projekt hivatalos oldala: http://www.wiris.com/). Saját fejlesztésű CAS-t használ, a feladatkészítés során számos hasznos beállítási lehetőséggel (pl. hogy az egyszerűsített, bővített, a faktorizált stb. alakokat fogadja-e el, vagy sem). Az adatok, képletek bevitelére mind a megoldói, mind a feladatlétrehozási oldalon ajánlott a fejlesztőcsoport által kifejlesztett, külön szoftverként is használható MathType képletszerkesztőt (a Moodle-ban ennek pluginjét) használni, ami ún. szabadkézi beírást is engedélyez, ami okostelefonon, tableten lehet igazán hasznos. Mivel ennek kezelése nagyon intuitív, így a feladatmegoldó részéről egyáltalán, de a feladatkészítőtől sem elvárás komoly programnyelv ismerete. A projekt nagyon jól dokumentált, a feladatkészítő számára áttekinthető, ábrákkal szemléletessé tett konkrét feladatokat bemutató leírások segítenek. A szoftvercsomag 1000-es képletbeírási, számítási nagyságrendig ingyenes, nagyobb intézmény számára viszont már fizetős a szolgáltatások használata.

Az itt megemlített lehetőségek azonban nem alkalmasak geometria szerkesztési feladatok beágyazására úgy, hogy az ellenőrizhető, vagy automatikusan ellenőrződő feladatként működjön.

5.7.5. Az elkészített GeoGebra appletek beágyazása a Moodle keretrendszerbe

A GeoGebra állományok appletként beágyazhatóak a Moodle-ba a GeoGebra_submissions plugin segítségével (a plugin a https://moodle.org/plugins/assignsubmission_geogebra oldalon érhető el). Ennek a pluginnek a segítségével a GeoGebrával készült applettjeink meg tudnak jelenni a Moodle kurzusban. Ha egy a korábbi alfejezetekben leírt módon elkészített automatikusan kiértékelődő appletet ágyazunk be, az jó gyakorló feladatnak, de nem tudja a házi feladatok ellenőrző szerepét betölteni, mivel a megoldás eredménye nem jegyeződik fel.

A Moodle-hoz létezik egy qtype_geogebra plugin, ami a Wiris csomaghoz hasonlóan, közvetlenül a Moodle tesztjeihez használt kérdésbank kérdései között hozhatók létre általa GeoGebra típusú feladatok (a plugin oldala: https://moodle.org/plugins/qtype_geogebra).

A plugin lehetővé teszi a megoldás állományban történő leadását. Ezt azonban nem tekinthetjük valós hosszútávú megoldásnak, a diák akár e-mailban is elküldhetné a tanárjának a megoldásokat tartalmazó állományokat, de azzal időrabló, nem effektív ellenőrzést kéne az oktatónak végeznie. A kérdés az, hogy a korábban leírt véletlenszerű alakban, automatikusan kiértékelődő applet hogyan volna beágyazható a Moodle-ba úgy, hogy a megoldás eredményessége közvetlenül a Moodle-ben jegyződjön föl?

A pluginban lehetőség van megadni azokat a bemeneti változókat, amelyeket randomizálni szeretnénk. Ha a feltöltött GeoGebra állományban ennek megfelelő nevű paraméterek szerepelnek (pl. ún. csúszkák), akkor azok véletlenszerű értékeinek köszönhetően minden egyes diákoknak különböző, véletlen kinézetű feladatot tud generálni a rendszer. Ez garantálni tudja, hogy a feladatok alakja véletlenszerű lesz minden megnyitás után, minden diáknak.

Az automatikus feladatkiértékeléshez, ellenőrzéshez egy megfelelő logikai változónak kell igaz vagy hamis értékeket felvennie az adott állományban, amelyet a plugin a logikai értéknek megfelelően ki tud értékelni, és azt a feladat eredményeként be tudja írni a Moodle adott feladathoz tartozó eredményéhez az adott felhasználónak. Tehát ha az appletben egy logikai változó értéke pl. igazra (true) változik, akkor ez a változás a Moodle-be elmentődik, mint eredmény. Mindezt a meghatározott paraméterek függvényében teszi. Az érdeklődők számára a (Stadlbauer, 2015) szolgáltathat információkat.

Ha mindebbe még a 142. oldalon látható, vagy egy ahhoz hasonló szkriptet is bekapcsolunk, akkor valóban automatikusan kiértékelődő feladatot tudunk létrehozni. Az ott használt `finished` logikai változó igazra váltása azt jelenti, hogy sikerült a feladatban meghatározott geometriai objektumot (pont, egyenes, kör, alakzat, ...) megszerkeszteni. A feladatmegoldó a bemutatott automatikusan kiértékelődő appletben a leírt módon megkapja a visszajelzést, hogy a megoldása sikeres volt, semmi egyéb teendője (pl. leadás gombra kattintás) nincs. A feladat teljesítéséről a bejegyzés a Moodle adatbázisába megtörténik.

A szkript bővítésével, módosításával egyes részfeladatokhoz is tudunk logikai változót kapcsolni, s így akár azokért is részpontokat tudunk adatni a rendszerrel. Sikertelen próbálkozás esetén a plugin lehetőséget biztosít többszöri próbálkozásra is, és itt a megszerezhető pontok számát is csökkenteni tudjuk akár. A sikertelen próbálkozás után útmutatót, tippet adhatunk a felhasználónak.

A tanár a tesztek kiértékelésének standard eszközeivel tudja követni a Moodle-ben az egyes diákjai haladását.

Az így létrehozott automatikusan kiértékelődő geometria feladat minden elvárásunknak megfelel.

5.8. Interaktív tananyagok készítése

A GeoGebra oldalán közzéteendő appletek (angolul a Resources, magyarul az Anyagok menüpont a weboldal bal oldali paneljén) szerkeszthetőek, szöveggel, képi és multimediális anyagokkal színesíthetőek, kötetbe rendezhetőek (ún. Book). A megosztás személyes, nyilvános linkkel csak azok számára, akikkel ezt megosszuk, és nyilvánosan is történhet. A feltöltött anyagok a szerző, és az ezzel felruházott felhasználók által utólag is szerkeszthetőek. Ezek az anyagok ezek után különböző szolgáltatások által is megoszthatóak, sőt más weboldalakba és LMS rendszerekbe is beágyazhatóak, és így szemléltető, magyarázó, tanítást- vagy tanulást segítő anyagok formájában jól használhatóak. Ha véletlenszerűen generálódó feladatmegadásokat, és automatikusan kiértékelődő feladatokat teszünk közzé (lásd az előző alfejezeteket), akkor a tanítványainknak gyakorló feladatokkal biztosíthatunk lehetőséget az ismeretek begyakorlására, rögzítésére. Ha a diákjaink feladatmegoldásainak eredményeiről tanárként szeretnénk visszajelzést, akkor a korábban bemutatott módon LMS-be integráltan is tudjuk kezelni.

A lehetőségek átfogó tananyagok közzétételére immár technikailag adottak, azonban kevés ilyen összefogó, tematikusan feldolgozott és a tantervekkel is összhangban lévő tananyag található. Ezzel függ össze az adott témakörrel kapcsolatos tananyagok keresése. Nagyon sok GeoGebra appletet is tartalmazó tananyag található az interneten, viszont az azok által használt nyelvezet, minőség, megbízhatóság kérdéses lehet, hiszen bárki ellenőrzés nélkül közzé tudja tenni a saját anyagait.

Az iskolai gyakorlatban (közoktatásban) célravezető volna olyan ilyen tananyagokat tartalmazó nyilvános forrást megadni a tanárok és a diákok számára is, ami ellenőrzött, verifikált, egységes megjelenést és szakmailag korrekt nyelvezetet használ a tantervekkel megegyező struktúrában. Ilyen szempontból meglehetősen úttörő jellegű kezdeményezés volt a magyarországi GEOMATECH oktatásfejlesztési projekt, ami 2014 januárjában indult útjára. A portál a http://tananyag.geomatech.hu/ címen érhető el. A tananyagok a Nemzeti Alaptantervvel összhangban kerültek kidolgozásra. A projekt eredményeiről (Prodromou & Lavicza, 2017) cikkben adtak nemzetközi szinten hírt. Megjegyeznénk azonban, hogy a portálon megjelenő tananyagok a GeoGebra anyagai között kerültek közzétételre (https://www.geogebra.org/u/geomatech), s innen, az itteni karakterizációval összhangban vannak a portálra beillesztve.

Ez is azt mutatja, hogy a GeoGebra weboldalán a legegyszerűbb az appletek közzététele és jelenleg már szöveges, képes, multimédiás tartalommal is bővíthetőek.

Szlovákiában jelenleg ilyen jellegű online tananyag a korábban (a 4. fejezetben) már említett *Planéta vedomostí* tananyagkezelő rendszer, amelyben állítólag több mint 15 000 anyag van matematikából közzétéve. A rendszert, és a tananyagokat, akárcsak a mögötte álló szándékot (annak szakmaiságát és korrektségét) sem kívánjuk kritizálni, s mindamellett, hogy nagyon előremutató, hogy az összes iskola összes tanárja és diákja számára feladatgyakorlási lehetőséget biztosít, azonban megjegyeznénk vele kapcsolatban három dolgot. Az egyik a feladatok testreszabhatósága: a feladatok, ha mégoly jók is, statikusak, minden diák ugyanazt a feladatot kapja, s az ezt használó tanárnak nincs lehetősége ezen változtatni. A második észrevételem a nyelvre vonatkozik, ugyanis a portál csak az államnyelven érhető el. A harmadik a geometriai szerkesztések hiánya. Hiába vannak geometriai tananyagok, útmutatók, a vonatkozó feladatokból pontosan a szerkesztések azok, amik teljes egészében hiányzanak.

A szlovákiai magyar iskolák, tanárok és diákok a felkészülésükben elvileg használhatják mindhárom említett lehetőséget, még ha a Geomatech nem is illeszkedik a helyi tantervekhez, a Planéta vedomostí nyelvi korlátokat tartalmazhat, a GeoGebra oldalán közzétett anyagokból meg a választás és a verifikálás okozhat nehézségeket.

Úgy gondoljuk, hogy mindezen tapasztalatok figyelmébe vételével lehetséges volna olyan matematikai portált kifejleszteni, ami a szlovákiai magyar közoktatás résztvevői számára biztosítani tudná, hogy a helyi tanterveknek megfelelően verifikált tartalommal biztosítson matematikai oktatási segédanyagokat, gyakorló és automatikusan ellenőrződő házi feladatokat is.

Persze jogosan merül fel a kérdés, hogy ha a lehetőség adott, akkor miért nem készült ez még el? Ennek egyik feltétele, hogy volna-e egyáltalán igény ilyen matematikai portálra. Egy ez évben induló kutatási projektben ezt is fel szeretnénk mérni. A portál elkészítésének a technikai feltételek (pl. webszerver, tárhely, ...) mellett személyi feltételei is volnának, azaz kellenének olyan képzett szakemberek, aki e portál kialakításához a tudásuk mellett az idejüket is erre áldozzák.

Az elmúlt pár évben ezen tapasztalatokat is figyelembe véve A Selye János Egyetemen zajló matematika tanári képzés mesterszintjén vezettük be a Matematikai szoftverek tantárgyat, ahol a matematikai szoftverek használatában a számítások végzése mellett az interaktív, univerzális szerkesztésekkel és az automatikusan kiértékelődő, véletlenszerűen felvett appletekkel és az eszköztár testreszabásával is foglalkozunk.

6. fejezet

Az oktatás jövője

A jövőt illetően nem kívánunk felelőtlen találgatásokba bocsátkozni, de véleményünk szerint a nem is olyan távoli jövőben az oktatásban, s ezen belül a matematika oktatásában is szemlélet és hozzáállásbeli változtatásokra lesz szükség. Az infokommunikációs technológiák rohamos fejlődésével és tömeges elterjedésével olyan társadalmi szemléletmódbeli változások is megjelentek, amelyekre a hagyományos iskolarendszer nincs felkészülve. Az enciklopédikus ismeretekhez való hozzáférés, és főként annak sebessége az internetnek köszönhetően egyszerűsödött és felgyorsult, viszont a kritikus, racionális gondolkozásra való képesség és az élethosszig való tanulás képessége egyre szükségesebb feltételként jelenik meg a mindennapi helytállás során. A fiatal korosztályok infokommunikációs eszköz- és alkalmazáshasználata más gondolkodási sémák kialakulásához vezetnek és más értékrendet képviselnek, mint ami a korábbi korosztályokra volt jellemző, ebből kifolyólag egyre mélyülnek az egyes generációk közötti szakadékok is. Ennek felismerése, felmérése és felelősségteljes megoldáskeresése adekvát oktatáspolitikai stratégiaváltozásokat igényelne.

Az oktatáspolitika szempontjából két uralkodó nézet van: az egyik szerint az iskolarendszernek (beleértve a felsőoktatást is) olyan fiatalokat kéne kiképeznie, akiknek a képzése konkrétan egy adott, akár speciális feladat-, munkakör betöltésére, és esetenként konkrét vállalat igényeire készít föl. Ez esetben tanulmányaik befejeztével a végzettek naprakész, aktuális ismeretekkel képesek munkába állni és munkájukat a tőlük telhető maximális felkészültséggel tudják ellátni. A másik nézet szerint az oktatásnak (főként a felsőoktatásnak) minél inkább egyetemesnek, univerzálisnak kéne lennie, általános gondolkodási sémákat kéne közben elsajátítani, s majd a tanulmányok befejeztével az adott munkakör kihívásai úgy formálják azt a személyt, hogy az általános tudása mellé a tanulási képességeivel megszerzi azokat a szükséges speciális ismereteket is, amelyek a munkavégzéséhez elengedhetetlenek.

Az első nézet kellő előrelátó tervezéssel rövid távon nagyon hatékony tud lenni, a munkáltató egy olyan munkavállalót kap, aki a munkavégzésére a lehetőségekhez képest maximálisan fel van készítve. Hosszabb távon viszont hátrányként jelentkezhet, hogy nincs szélesebb látóköre, és nem biztos, hogy képes a megváltozott munkakörülmények, -követelmények igényeinek eleget tenni, mert nem tanulta (élte, tapasztalta, ...) meg az adaptálódás, az önképzés, az élethosszig tartó tanulás képességét.

A másik nézet univerzális embere semmiben sem számít szakmailag kellően képzettnek, így kezdetben meg kell tanulnia a szakmája végzéséhez szükséges speciális ismereteket, s ezért eleinte nem tekinthető jó szakembernek. Ha viszont beletanul, akkor az egyéb ismereteinek hála képes lesz kreatív önálló munkavégzésre is.

Az életben azonban semmi sem olyan egyértelműen eldönthető, mint a formális, matematikai logikában. Az említett két nézőpont közül egyik sem tekinthető kizárólagosan helyesnek, de helytelennek sem. Az igazság véleményünk szerint a kettő között, az arany középúton található meg, mint általában.

Amit e tekintetben látnunk kell, az az, hogy jó egy-két emberöltővel ezelőtt (bő 30-40 éve) a ma legkeresettebb szakmáknak számító különböző IT szakemberek, programozók szakirányos képzése nem csupán hogy nem létezett, de még csak nem is létezhetett, és nem igazán lehetett sejteni sem, hogy a számítástechnika ilyen léptékben és irányban fog fejlődni. Tehát képtelenség lett volna ezen szakemberek szakirányos képzését előre megtervezni.

Másrészt viszont ahogy a mondás is tartja: „ Kutyából nem lesz szalonna.", vagyis ahhoz, hogy valaki jo IT szakemberré, programozóvá váljon, ahhoz azért kellenek bizonyos olyan képességek, jártasságok, amik nélkül ez nem megvalósítható. A jelenleg idősebb informatikusok általában véve matematikai, természettudományos vagy műszaki képzettségűek voltak eredetileg, s így jutottak el a számítástechnikához.

A 21. századra a jelenlegi gondolkodók, futurológusok (pl.: R. Kurzwell, Y. N. Harari) három tudományágban: a mesterséges intelligenciák fejlesztésében, a nanotechnikában és a genetikai kutatásokban, genetikai tervezésben látják a legnagyobb lehetőségeket (de akár kockázatokat is). Az európai, és így a szlovákiai kutatási stratégiák is előkelő, kiemelt helyen foglalkoznak ezekkel a témákkal. Szlovákiában jelenleg csakis a *Through knowledge towards prosperity - Research and Innovation Strategy for Smart Specialisation of the Slovak Republic* (elérhetősége: https://www.opvai.sk/media/100176/ris3_en.pdf) című stratégiai kiadványban megnevezett területeken, az azzal összhangban lévő uniós kutatási pályázatok nyújthatóak csak be. Ezen témák – ahogy azt láthatjuk – alapvetően természettudományos megközelítést követelnek meg. Ezért nem felelőtlenség állítani, hogy a természettudományok iránti érdeklődést élénkítenünk kéne, ha nem akarunk a világtól elmaradni.

Szlovákiában (akárcsak a térség további országaiban is, de Európa szerte foglalkoznak a STEM (Science, Technology, Engeneering and Mathematics) műveltség emelésének kérdéseivel, mégis a természettudományos és a műszaki képzésben is részt vevők száma, főleg arányaiban nézve meglehetősen alacsony. Bár a kormányzat már detektálta a problémát, de még mindig nem tudott előállni olyan átfogó intézkedéscsomaggal, ami orvosolná a gondot. Pedig a próbálkozások a költségvetési támogatás módosításától kezdve a mediális megjelenésekig tartó spektrumom mozogtak, és újfent szóba került a kötelező matematika érettségi bevezetése is.

Ennek a témának a kapcsán viszont egy-egy izolált intézkedéssel nem valószínű a hosszan tartó siker fenntartása, és a társadalom általános közvélekedését is úgy kéne irányítani, hogy a matematikai és természettudományos oktatást pozitívan diszkriminálja.

6.1. A matematika és a geometria oktatásának lehetséges jövője

Amit az átlagnál (kissé) jobban tudunk csinálni, azt szívesen csináljuk, mert sikerélményt okoz. Ha valamit szívesen csinálunk, akkor azt gyakrabban, örömmel tesszük. Ha kellően sokáig, érdeklődéssel csinálunk valamit, akkor abban általában egyre jobbak leszünk, és ha jobbak leszünk benne, az sikerélményt okoz. Ez a motivációs körfolyamat megerősítést ad nekünk azokon a területeken, amelyeken úgy érezzük, hogy jók vagyunk. Ez a magyarázata annak is, hogy az a gyerek aki „jó" matematikából, az odafigyel és megérti az iskolában, nem kell otthon órákon keresztül tanulnia és mégis eredményes. A matematika esetében ennek a kulcsa az, hogy a gyermek értse, hogy mi zajlik. Ahogy azt már említettük, hogy a megértés önmagában nem elégséges, de a megértés hiánya a diák számára „fekete mágia" szituációt hoz létre: anélkül hogy értené a dolog miért-jét, megpróbálja betanulni a tananyagot, a hogyan-t. Ez a rövid távú memorizálás, felszínes ismeret azonban nem teszi képessé az ismeret alkalmazására, ami szükségszerűen frusztrációhoz, csalódottsághoz és demotivációhoz vezet. És ez egy negatív ciklust eredményez: a diák elkönyveli, hogy ő ezt nem tudja (főleg, ha a közösség, a család ezt még erősíti azzal, hogy: Rá se ránts, mi sem tudjuk!), ezért kimaradnak nála olyan algoritmusok, megoldási sémák rögzülései, amelyek hiánya vagy deformitása a későbbiekben új fogalmak megértését, beépülését a fogalmi hálóba is akadályozni fogja. Ez pedig mindinkább oda vezet, hogy egyre nagyobb mértékben van elmaradva az elvártaktól és egyre nehezebb volna behoznia az elmaradását, és averziója alakul ki a matematikával szemben.

Hogy ez ne alakulhasson ki, a matematika órának érdekesnek kellene lennie, fel kéne kelteni és fenn is kéne tartania a diák figyelmét és érdeklődését. Eközben meg kéne értenie az új tananyagot, be kéne ágyaznia a már ismert fogalmak közé, fel kéne ismernie a köztük lévő kapcsolatokat is. Az ideális az volna, ha minél több ismeretet a diákkal fedeztetnénk fel. A felismert, megértett fogalmak, összefüggések és/vagy törvényszerűségek rögzítése érdekében feladatokat végeztetünk vele.

Minden embernek, gyermeknek megvan a maga, egyedi gondolkodási stílusa. Ennek következtében nincs univerzális tanítási módszer, ami mindig, minden körülmények között bárkire alkalmazható. A tanár szerepének ebből kifolyólag többnek kell lennie, mint egy két lábon járó enciklopédiának. Az info-kommunikációs eszközök által az ún. tárgyi tudáshoz, enciklopédikus ismeretekhez való hozzáférés az utóbbi pár évtizedben lényegesen megkönnyebbült, és felgyorsult. Ebből kifolyólag a tanár szerepének is az oktatási folyamatban változnia kell. Míg korábban a tanár (és a tankönyv, ha volt) volt az ismeretek szinte kizárólagos forrása, addig mára a tanár vetélytársa a google és a wikipedia. Hogy egy ilyen versenyszituációt a tanár kezelni tudjon, nem elégséges csak felszínes ismereteket közölni, de az oktatási folyamat katalizátorának és kovászának kell lennie. Először is (de folyamatosan) fel kell mérnie tanítványai képességeit, ismereteit, és ezen diagnosztika alapján tapasztalatait alkalmazva igyekeznie kell mindenki, vagy legalábbis a többség számára olyan módszereket és eszközöket alkalmazni a tanítványai részére, ami tanulásukban optimális előrehaladást biztosít nekik. Mindezt úgy, hogy felkelti a tanítványai matematika iránti érdeklődését és folyamatosan fenntartja a motivációjukat.

Jelenleg ezt a folyamatot egy jól képzett, megbízható matematikai szaktudással és megfelelő tanári készségekkel rendelkező tanár képes lehet korrektül kezelni. Habár elvben jó lenne minden diákkal egyénileg, az ő igényeinek megfelelően foglalkozni, de az ilyen totális differenciálás a jelenlegi oktatási helyzet és körülmények között véleményünk szerint utópia. Nem tartjuk kizárhatónak, hogy a közeli jövő, az elkövetkező pár évtized mesterséges intelligencia kutatásai eljuthatnak olyan szintre, hogy képes lenne olyan komplex tanári kompetenciákkal rendelkező, valós időben működő és egyidejűleg több diákkal is foglalkozó MI-k létrehozására, ami helyettesíteni tudna akár egy tanárt. Ennek bekövetkezését azonban nem tartjuk valószínűnek az alábbi okok végett: Az első, hogy a teljesítendő folyamat nagyon komplex: minden diák individuum, minden egyes szituációban meg kell őt érteni és meg kell találni a megfelelő, rá ható reakciókat, a másik az, hogy hogyan reagálna erre az egyes ember és hogyan a társadalom? A harmadik érvünk, hogy ha ilyen komplex, személyiség-jellegű MI-t sikerülne létrehozni, akkor annak a tulajdonosai ezen képességeit egész biztosan más területeken szeretnék kiaknázni, és az utolsó pedig az, elképzelhető, hogy a kifejlesztése és fenntartására fordított forrásokból gazdaságosabb továbbra is tanárokat képezni.

Addig is, és lehet azután is szükség lesz tanárok képzésére. A sokat emlegetett finn modell alapján a tanárképzésbe a legjobb képességű diákokat veszik be, viszont Szlovákiában és a bővebb régióban is a matematika és természettudományos tárgyak tanárainak képzésében a jelentkezők számával és sokszor képességeikkel is gondok vannak. Szlovákiában az összes matematikai tudományos szakon összesen 638 hallgató folytatta a tanulmányait a 122 306-os államilag finanszírozott hallgatói létszámból (0,52%) a 2016-2017-es akadémiai évben (a 2019-es év szlovákiai állami költségvetési szétírás szerint, forrás: https://www.minedu.sk/data/att/14160.xlsx), s ezen létszámnak is a nagyobb része pénzügyi, menedzsment és biztosítási matematika szakokon folytatta tanulmányait. Bár az országos oktatásügyi statisztikák alapján Szlovákiában elég képzett tanár van, ez is egy féligazság: egyes tantárgyak tanáraiból jelentős túlkínálat van a munkaerőpiacon, viszont matematikából és természettudományokból ez nem így van. Matematika tanári képzésben (szakpárosításban) 217 hallgató folytatta a tanulmányait a 13 121 tanár szakos hallgató közül (1,65%) a 2016-2017-es akadémiai évben (a 2019-es év szlovákiai állami költségvetési szétírás szerint, forrás: https://www.minedu.sk/data/att/14160.xlsx). Ez az arány nincs összhangban a matematika tantárgy közoktatás tanterveiben található arányaival.

A matematikával szembeni averzió ellen csak egy szakmailag jól felkészült matematikatanár tehet. A Selye János Egyetemen matematika tanári szakára jártak körében elvégzett kis létszámú, nem reprezentatív felmérésünk alapján annak az oka, hogy ezt a szakot választották, egy korábbi matematika-tanáruk személyiségének tudható be, aki megkedveltette velük a matematikát. Ezért kulcsfontosságú a matematika tanárok képzése. A matematika-oktatás ezen attitűdbeli kezelése kapcsán sok tekintetben egyetértünk Dienes Zoltán gondolataival (Dienes, 2015), és törekednünk kell arra, hogy a következő generációkkal ne utáltassuk meg módszeresen a matematikát.

6.1.1. Mit tanítsunk?

A megváltozott körülmények között azon kívül, hogy hogyan kéne a matematikát tanítani felmerül az is, hogy mit (mely tananyagokat és milyen mélységben) kéne tanítanunk?

A korábban leírt oktatáspolitikai nézetekhez visszatérve gyakran hangzik el mostanság, hogy azt kéne tanítanunk, amire a diákoknak a tanulmányaik után szükségük lesz. Azt azonban most meghatározni, ahogyan azt már az előzőekben is kifejtettük, hogy milyen ismeretekre és készségekre lesz szüksége a munkaerőpiacnak évtizedek múlva lehetetlen vállalkozás lenne.

A szlovákiai közoktatás matematika tantárgyának tanmeneteiben nyomom követhető egy tervszerű megerősítése a kombinatorika, valószínűségszámítás és statisztika témakörnek. A tanmenetek változásaiból jól látható, hogy egyre magasabb óraszámban kell ezzel a témakörrel és a bele tartozó előírt tanagyagokkal foglalkozni, és az egyes országos felmérések (Monitor 5, Monitor 9, Maturita) feladatai között is láthatóan növekszik az ebbe a témakörbe tartozó feladatok reprezentáltsága. Bár ezen trend bevezetését hivatalos indoklás nem kísérte, az tény, hogy a nemzetközi felmérések (pl. PISA) korábbi tesztjei is gyakrabban tartalmaztak olyan feladatokat, ahol táblázatból és grafikonból ki- illetve leolvasott adatok alapján kellett számításokat végezni, amik a szövegértési nehézségek mellett csökkentették a helyi feladatmegoldók eredményességét.

A tanmenetbeli változások mégsem hoztak jobb szereplést ezen típusú nemzetközi felmérésekben. Ezzel természetesen nem az ellen ágálunk, hogy miért volt szükség e témakör tananyagbeli szerepének erősítésére. Egy táblázatbeli vagy egy grafikonon való tájékozódás, az abból való információ kiolvasása és értelmezése egy olyan képesség, ami az általános intelligenciának része, de nyilván fejleszthető. Viszont nem biztos, hogy egyrészt ennek egyedül a matematika tantárgy feladatának kéne lennie, másrészt pedig képes-e biztosítani a kívánt eredményt a témakör ilyen módon történt bevezetése (Vajon segíti-e ennek a képességnek a fejlesztését, ha megtaníttatjuk a permutációk, variációk és kombinációk kiszámítására vonatkozó képleteket, vagy a medián és módusz kiszámításának módszereit?)?

A matematika tantárgy (közoktatásbeli) oktatásának véleményünk szerint kettős szerepe van, ahogyan azt már korábban is kifejtettük: egyrészt a matematika eszköztárába tartalmazó módszerek, algoritmikus eljárások készségszintű kialakítása, másrészt pedig ezen módszerek, eljárások mögötti logikus, racionális gondolkozás fejlesztése. Természetesen e kettő összefonódik és nehezen választható szét. Ezért, bár a jövő szempontjából ez utóbbit fontosabbnak tartanánk, e összefonódás miatt nem taníthatunk csak gondolkodást. Így hiba volna, ha formális logika oktatásával kezdenénk a matematika oktatását, hiszen ilyen szintű absztrakcióra nem felkészült, nem képes a 6 éves kisdiák, nincsenek meg hozzá az ismereti, fogalmi tapasztalatai sem.

Nem szabad lebecsülni a matematika eszköztárát képző algoritmusok szerepét sem a matematika oktatásában. A matematikatörténetből tudjuk, hogy a tízes alapú helyi értékes számok összeadására, kivonására, szorzására és osztására vonatkozó aritmetikai algoritmusok, amelyeket ma a tanulók már alsó, és részben a felső tagozatos matematika tantárgyukon belül megtanulnak használni (ideális esetben), csak a középkorban (a 13. század után) terjedtek el és forradalmasították az európai matematika számos területét. A nem helyi értékes és nem tízes alapú számrendszerekben (pl. római számok) végezhető műveleteknél sokkalta letisztultabb, egyszerűbb, egyértelműbb és világosabb műveleti szabályokkal lehet megtanulni a számolást. A természetes (s majd a tizedes, egész és valós) számokkal végzett aritmetikai műveletekkel szerzett tapasztalatok alapján, azok leszűrésével mondhatóak ki a műveletekre vonatkozó tulajdonságok (asszociativitás, kommutativitás, disztributivitás), azok absztrahálásával juthatunk el az algebrához, egyenletek oldásához is. Ezért nem volna célravezető ezen készségek fejlesztésére befektetett időt kurtítani, mondván, hogy a számológépek és számítógépek nálunk gyorsabban és megbízhatóbban végzik el ezen műveleteket. Az algoritmikus tevékenységvégzés segíti az ismeretek begyakorlását, rögzülését, s így megbízható, stabil tudásra építve lehet a fogalomkört és annak kapcsolati hálója ismereteit bővíteni.

A matematikában kulcsfontosságú szerepet játszik az absztrakció. Maga a szám is absztrakció. A három alma, a három labda, a három gyerek, a három mese, …közös mennyiségi jellemzője a három, ami három tárgy vagy fogalom elvonatkoztatott matematikai számfogalmához, a hármashoz vezet, amit a 3-as jellel írunk le. Egy kisgyermeknél általában ez egy egyértelmű megfeleltetés-sorozat a tárgyak, az ujjai és a kialakuló, tízes számkörű számfogalom között. Egy következő absztrakciós szint az, mikor a tízes (húszas) számkört átlépjük, hiszen „elfogynak” hozzá az ujjai. Újabb szintlépések a természetes számok egyre bővebb számkörei, valamint a tizedes számok, a negatív számok, a törtek, az irracionális és az imaginárius résszel rendelkező komplex számok fogalmának megjelenése, amelyek abból adódnak, hogy az addig ismert (természetes, egész, racionális, valós) számok körében el nem végezhető műveletek (osztás, kivonás, gyökvonás) olyan gyűrű- vagy testbővítést eredményeznek, amelyben ezen műveletek is elvégezhetővé válnak. Ezzel párhuzamosan megjelenik egy következő absztrakciós szint, amikor egy egyelőre nem ismert számot valahogy máshogy, betűvel jelölünk – és az aritmetikától eljutunk az algebráig. A végtelenül nagy és a végtelenül kicsi szám fogalmai, absztrakciós szintlépése vezet el a határérték és az infinitezimális számítás (deriválás, integrálás, ...) alapjaihoz. Ahhoz, hogy ezeket a szintlépéseket meg tudjuk tenni, az előző szint ismereteinek, fogalmi beágyazódásának és (számolási) készségeinek kellően stabilnak kell már lenniük. Ezen elvonatkoztatott közeg, s annak felfedett, megtanult és begyakorolt eljárásai, módszerei mégis alkalmazhatóak a valós életből származó helyzetekben is. Ezeknek a modellszituációi tulajdonképpen a szöveges feladatok.

A geometria esetében szintén a való életben igazából nem létező fogalmakkal operálunk: nincs végtelenül hosszú egyenes vonalunk (egyenes), sem kiterjedés nélküli pontunk. Ezek szintén elvonatkoztatott alapfogalmak, és az ezek közti (illeszkedési, rendezési, ...) kapcsolatok (relációk) segítségével származtathatunk további geometriai fogalmakat. A távolság és a szög mérésének egységé(ei)nek bevezetésével ezen köznapi életben előforduló konkrét mérőeszközöket kapcsoljuk össze az elvont geometriai fogalmakkal. Az alapfogalmakból, azok relációiból és a metrikából levezetett, vonatkoztatott geometriai fogalmak (mint pl. négyzet, téglalap, ...) és azok megállapított tulajdonságai a köznapi, ember által teremtett környezet minduntalan visszatérő elemei (az életterünk épületeiben ezek a leggyakrabban megtalálható alakzati formák).

A geometriai szerkesztések háttérbe szorulásának az egyik oka az, hogy egyesek szerint ezekre (akárcsak a számolási készségekre) sincs a való életben szükség. A másik ok, ahogyan azt már korábban kifejtettük, hogy a teszt jellegű (elektronikusan, pl. szövegfelismerő számítógépes szoftverekkel javított) tudásfelmérésekbe a szerkesztési feladatok nem, vagy csak nagyon nehezen illeszthetők be és értékelhetők.

Ez utóbbi okra az előző fejezetben mutattunk olyan elektronikus szoftveres megoldásokat, amelyek segítségével olyan elektronikus tesztfeladatokat tudunk készíteni, ahol az adott szerkesztési feladatot meg tudjuk szerkeszteni és az eredmény helyességét a rendszer automatikusan értékelni tudja.

Ami pedig a szerkesztések tananyagban szerepeltetése mellett szól, az az a tény, hogy vannak, és a jövőben is lesznek olyan szakmák (pl. építészmérnök, ács, asztalos, stb.) ahol ezekre a készségekre szükség lesz (meglehetősen kevés szakma követeli meg, hogy valaki tudjon énekelni, mégis a köznevelési program része). Másrészt viszont a szerkesztési feladatoknak komoly gondolkodásfejlesztő hatása tud lenni, és a feladatok megoldása közben olyan gondolkodási sémákat, „trükköket” és feladat-, problémamegoldási stratégiákat tanulunk meg, amelyek megmutatják a matematika és a problémamegoldás divergens gondolkodási, kreatív kapcsolatkeresési módszereit, eljárásait. A szerkesszünk háromszöget három adatból (pl. oldal, szög, magasság, súlyvonal, a szögfelező szakasz hossza, oldalak vagy szögek összege vagy különbsége, valamely nevezetes pont helyzete, ...) szinte kimeríthetetlen számú feladat lehetőségét biztosítja, s eközben egy apró modifikáció teljesen más feladatot és nehézséget okoz. A szerkesztési feladatok általános megoldása (amikor pl. a három adatból való háromszög szerkesztése során nem adjuk meg, hogy ezen részei a háromszögnek mekkorák), főleg annak megvitatása: hogy milyen esetben van megoldása a feladatnak, hogy mikor mennyi megoldása van, egy olyan gondolatkísérlet, amihez foghatóval nem sűrűn találkozik az adott korosztály diákja.

Az nyilvánvalóan szükségszerű, hogy a társadalmi és a technikai fejlődés a matematika tananyagára is hatással legyen. Erre példaként azt hozhatjuk fel, hogy 4-5 évtizede a természettudományos és a műszaki tárgyak gyors, közelítő számítások elvégzését várták el (a számok tudományos alakban, mint egy 10-nél kisebb, két, vagy legfeljebb négy tizedesre kerekített szám és 10 megfelelő hatványának szorzata írható fel), és ezért a logaritmusok, az azokkal végzett műveletek a középiskolai tananyag kiemelt tananyagát képezték. Ezen felül ehhez egy nagyszerű segédeszközt a logarléc (logaritmikus számolóléc) használatát készségszintre emelve a gyakorlat számára gyors, megbízható és alkalmazható közelítő számítási algoritmust, eljárást kaptak a természettudományi és műszaki tárgyak. Az elektronikus számológépek megjelenésével azonban mind a logaritmikus számolás, mind a logarléc használata fokozatosan kiszorult az oktatásból, mivel még gyorsabb, pontosabb és megbízhatóbb használható segédeszköz jelent meg a számológépek képében. A rendszerváltás előtti tankönyvek külön foglalkoztak azzal, hogy hogyan kell a számológépet használni. Habár sok esetben a jelen korban sem volna haszontalan, hogy megtanítsuk a diákokat a saját számológépük használatára, de sokkal nehezebb ezen jártasságok fejlesztése, ha minden diák más-más típusú számológépet, vagy különböző okos-telefont és azon különféle számológép alkalmazást használ. Hasonlóan elmondható, hogy a függvények értékeit is kiszámoló számológépek megjelenése kiszorította a négyjegyű függvénytáblázatok használatát is, amelyek korábban a középiskolai matematika tantárgyhoz biztosított segédkönyv voltak.

Mindezen változások és azok a matematika tananyagára vonatkozó hatásai is szükségszerűek voltak, és feltehetően a matematikai szoftverek, a használt eszközök fejlődésének köszönhetően hasonló jellegű változások, de akár paradigma-váltások is a jövendőben is várhatóak. A matematika tananyagban megjelennek bizonyos törekvések hatásai is. Az 1980-as évek elején Szlovákiában a halmazelmélet alapjain felépített matematika nézete határozta meg az alapszintű matematikaoktatást, s csak azok után hagytak fel vele, hogy nem szállította a kívánt eredményeket. A kísérleti oktatás eredményei nem mindig tükröződnek vissza a teljes körű bevezetés után, hiszen a kísérleti oktatás során a résztvevő tanárok törekvése, hogy megmutassák a módszerük eredményesebb voltát, saját magukat is motiváltabbá teszi. A kísérlet során tehát valóban elhivatott, felkészült tanárok próbálják a módszerüket alkalmazni, aminek következtében újszerűek, érdekesek és hitelesek lesznek a tanítványaik szemében és ez jobb eredményeket is szolgáltat. A teljeskörű bevezetés során azonban ez a faktor viszont már nincs jelen.

Az elmúlt 3 évtizedben a szlovákiai matematika közoktatásában látható a kombinatorika, valószínűségszámítás és statisztika témakör oktatási keretének megerősítése és már az alsóbb szinteken történő bevezetése is. A bemutatott tesztekben ezen témakör gyakran olyan feladatok alakjában jelenik meg (főleg az alsóbb szinteken), hogy táblázatból, grafikonról, diagramról kivagy leolvasott adatok alapján kell a megoldást keresni. Azzal a ténnyel, hogy nem csak iskolai mintapéldákkal (ahol pontosan és csakis a feladatmegoldáshoz szükséges adatok vannak csak megadva) igyekszünk felmérni a tanulók feladatmegoldó képességeit, egyet kell értenünk, hiszen ahogy arra Pólya is rámutat (Pólya, 1977), a tanulónak szembesülnie kell olyan feladattal is, ahol a megoldhatósághoz szükséges adatok hiányoznak (ez viszont ugyebár egy tesztben nehezebben alkalmazható), és olyan feladatokkal is, ahol a megadott adatok közül ki kell választani a megoldás számára releváns adatokat és azzal kell megoldásra jutni. Annál is inkább törekednünk kell erre, mivel a természettudományokban, a hétköznapi életben is általában egy nagyobb adathalmazból kell szeparálnunk azokat az adatokat, amelyekkel dolgozni fogunk.

A közoktatás matematika tantárgyának tartalmi töltetét zömében a tudomány leszűrt, kikristályosodott, kodifikált és a 19. és 20. század fordulóján rendszerezett ismeretanyaga képezi. A jelenlegi közoktatásbeli matematika tantárgy tartalmi töltetében az utóbbi kb. száz évben oktatott matematika tárgyakhoz képest kevés az olyan témakör, tananyag, ami ebben az egy századnyi időben nem szerepelt volna korábban (talán a halmazelmélet), vagy ne szerepelne az akár ma is. A korábbi bekezdésekben megemlített változások inkább csak hangsúly-eltolódásoknak tekinthetők, az alapvető tartalmi töltet (aritmetika, algebra, geometria, függvények, kombinatorika és valószínűségszámítás, statisztika) alapjai változatlanok. A 20. század során a matematikából kifejődött rokon diszciplína, az informatika – amelynek rendületlen fejlődése jó néhány technológia- és paradigma-váltást is hozott – a közoktatásban is elkülönült saját dedikált tantárggyal rendelkezik. A matematika, mint tudomány utóbbi évtizedekben elért eredményei, fejlődése azonban kevés olyan korszakalkotó újdonságot szolgáltatott ezen felül, ami a közoktatás matematika tantárgyának tartalmi reformját követelné. Ezért nem feltételezzük, hogy a matematika tantárgy tanmenetei radikális változásokon mennének át: nem feltételezhető, hogy kimaradnának eddig tanított bővebb témakörök, illetve, hogy teljesen újak jelennének meg. Ami ebből a szempontból elképzelhető, azok a korábban bemutatott hangsúly-eltolódások folyatódása vagy azokhoz hasonló kisebb változások, hacsak a politikai célok ezt nem írják felül. Természetesen egyes, a felsőoktatás releváns tanulmányi szakjain, programjain belül frissebb matematikai elméletek és eredmények is oktatva vannak (pl. játékelmélet, számelmélet és kriptográfia).

Mindezeket összevetve ezen fejezet kezdő kérdésére nem mondtuk ki, hogy mit kéne (és mit nem) a jelenlegi tananyagból tanítani, és azt milyen mélységben, viszont megfogalmaztunk és megmagyaráztunk pár, e témakörben lejátszódó folyamatot, trendet és a mögöttük meghúzódó elvi gondolatokat is. Egyrészt a matematika oktatásának közoktatási keretét úgyis az állami oktatási program határozza meg, másrészt az viszont az iskola és a tanár számára is ad mozgásteret. E szempontból is azonban a tanító, a tanár a kulcsszereplő: egy matematikából és annak tanításából is jól felkészült, hozzáértő szakember képes a következő generációnak átörökíteni a matematika ismeretanyagát és a hozzá kapcsolódó készségeket is kialakítani, fejleszteni és elmélyíteni. Egy jó tanító, tanár egy kevésbé precíz, átgondolt állami tanmenet mellett is hatékony tud lenni (megfelelően kiválasztott tananyagokat a kellő mélységben oktatva), amit egy elvileg ideális előírt tanmenet mellett sem képes egy arra nem alkalmas oktató. Ezért is kulcsfontosságú a megfelelő tanítók és matematika tanárok képzése.

Befejezés

A szlovákiai közoktatásban a matematika tantárgynak oktatási kereteivel kapcsolatban elvégzett kutatásaink azt mutatják, hogy a rendszerváltás óta eltelt három évtized alatt végrehajtott tantervi változtatások, reformok a matematika tantárgy előírt óraterjedelmét csökkentették, viszont annak tartalmi töltetének mennyiségén sokat nem változtattak. Ez utóbbi azonban nem jelent változatlanságot: míg egyes témakörök tananyagát, így a geometriát is, fokozatosan „lefaragták”, viszont a kombinatorika, valószínűségszámítás és statisztika témaköre bekerült a törzsanyagba és annak reprezentáltsága egyre nőtt.

Ezen változások fényében is megvizsgáltuk, hogy milyen eredményeket szolgáltattak a helyi és nemzetközi matematikai felmérések. Szlovákia a TIMSS és a PISA nemzetközi felméréssorozatokba van bekapcsolódva, amelyek matematikai kompetenciákat is mérnek. Az egyes felmérések eredményeit összevetve mind a TIMSS, mind a PISA felméréssorozatokban Szlovákia eredményessége csökkenő trendet mutat matematikából: az élmezőnyből csúszik vissza az átlag alattiak közé.

A hazai felmérések az alapiskola alsó tagozata után (Testovanie-5) a felső tagozat végén (Testovanie-9), illetve a középiskolai érettségi (Maturita) központi írásbeli tesztjével mérnek. A Testovanie-5 eredményei javuló trendet mutatnak, viszont ezen korosztály a nemzetközi felmérésekben az átlaghoz képest egyre rosszabb eredményeket ért el. Ezért megvizsgáltuk a Monitor 5 mérőeszközeit, két olyan, időben távolabbi tesztelés tesztjeit hasonlítottuk össze, amelyek eredményességében jelentős különbség volt felfedezhető. A tesztkérdések igényességének összehasonlításával arra jutottunk, hogy későbbi, az eredményesebb (2017-es) teszt feladatai nem tekinthetőek kevésbé nehéznek, mint a korábbi (2013-as) teszté. Experimentálisan is összehasonlítottuk a teszteket: egy kellően nagy mintán (243 fő) végeztük el mindkét teszt megíratását, és bár ezen mintán a két teszt eredményei közti különbség nem szignifikáns, a 2013-as teszten értek el jobb eredményt. Mivel a tesztek teoretikus és kísérleti összehasonlítása is azt hozta ki, hogy egy kissé a igényesebb volt 2017-es teszt, a Testovanie-5 teszteléssorozat valószínűsíthetően objektíven mért. A nemzetközi felméréseken Szlovákia folyamatos hátrább csúszásának feltehetően más okai kell hogy legyenek (a tesztelésekben részt vevő országok változó összetétele, más típusú feladatok, az olvasási készségek hiánya, . . .). A Testovanie-9 és a Maturita felméréssorozatok esetében teoretikus, elemző összehasonlítást végeztünk két-két teszttel, ami nem mutatja jelét annak, hogy kevésbé igényes feladatokkal történnének a tesztelések. Az érettségik tesztjei kapcsán viszont ki kell emelnünk, hogy ezek már nem teljes populációt lefedő felmérések, hiszen ezt csak a matematikából érettségizők írják meg, s mivel a matematika Szlovákiában nem kötelező érettségi tantárgy, ezért az utóbbi évben az érettségizőknek csak 12,8%-a érettségizett matematikából.

A geometria esetében főként annak szerkesztésekkel foglalkozó témakörei csökkentek jelentős mértékben. Ennek okát leginkább abban látjuk, hogy ezen ismeretek mérése olyan tesztekkel, amelyek csak számadatot fogadnak el, vagy feleletválasztósak, meglehetősen nehézkes. Ezt támasztja alá, hogy a szlovákiai felmérések tesztjeiben szerkesztési feladatok szinte nem is szerepelnek (amit ide sorolhatnánk, azok egy ismeret alkalmazásánál nem igényesebb feladatok, azaz nem vetekednek komplexitásban egy rendes szerkesztési feladattal – pl. egy háromszög szerkesztésével három adatból). A geometria középiskolai oktatásában is található pár érdekes dolog, pl. az analitikus geometria nem része a gimnáziumi előírt tantervnek sem, viszont az érettségi teszten ezen témakör szerepelhet is, és általában szerepel is.

Az infó-kommunikációs technológiák fejlődésével ezek az ezredforduló környékén megjelentek a szlovákiai iskolákban is. Voltak és vannak olyan országos programok is, amelyek az iskolák ilyen jellegű eszközellátottságát és internet-kapcsolatát hivatottak fejleszteni. Mindez jó, ahogyan ezt sokan kifejtették már, azonban önmagában azzal, hogy számítógépet, tabletet és internetet adunk a diákok kezébe, még nem oldottuk meg az oktatás minden problémáját. Mindezek csupán csak eszközök, amelyek egy hozzáértő, felkészült és elhivatott jó tanár kezében érdekesebb, szemléletesebb, jobban emészthető és akár sikeresebb és eredményesebb órákat, oktatási folyamatot eredményezhet.

A matematikában és annak oktatásában használható interaktív matematikai szoftverek és azok lehet bemutatása mellett foglalkoztunk azok potenciális lehetőségeivel, de kockázataival is. A matematika, és ezen belül a geometria tantervbeli órakeret-csökkenésének hatásainak csökkentése érdekében úgy gondoljuk, hogy mivel egy-egy szerkesztési feladatnak nem szentelhető annyi idő, mint régebben, az oktatási folyamat hasznos kiegészítői tudnak lenni az automatikusan kiértékelődő geometriai appletek. Megmutatjuk (konkrét példán is) hogyan tudunk ilyen appleteket létrehozni a legelterjedtebb matematika szoftver (GeoGebra) segítségével, ahogy azt is, hogy hogyan lehetséges az így elkészített, a kezdő adatok vagy értékek véletlenszerűen megválasztott, parametrizált feladatainak appletjeit beágyazni a legelterjedtebb oktatástámogató keretrendszerbe (Moodle). Természetesen nincsenek illúzióink, hogy ezen lehetőségek helyettesíteni tudnának egy jó tanár óráját, de hisszük, hogy ezen lehetőségek kiegészítésével nem kell lemondanunk a szerkesztési geometria oktatásáról, és eközben a diákok is az ismeretek rögzítéséhez szükséges időigényes gyakorlás lehetőségét is megkapják.

Felhasznált irodalom

Testovanie T5-2013 – priebeh, výsledky a analýzy. (2014). Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//46/testovanie_5_2013/Spr%C3%A1va_T5-2013_final_18marec2014_OK.pdf

Testovanie T5-2014 – priebeh, výsledky a analýzy. (2015). Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//46/testovanie_t5_2014/Spr%C3%A1va_T5-2014_final.pdf

Testovanie T5-2015 – priebeh, výsledky a analýzy. (2016). Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//46/testovanie_5_2015/SPRAVA_T5_2015_na_zverejnenie.pdf

Testovanie T5-2016 – priebeh, výsledky a analýzy. (2017). Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//46/testovanie_5_2016/Spr%C3%A1va_T5-2016_final.pdf

Alföldyová, I. & Polgáryová, E. (2012, September). Testovanie 9-2012, priebeh, výsledky a analýzy. Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//26/testovanie_9_2012/Spr%C3%A1va_T9-2012_final.pdf

Výsledky celoslovenského testovania žiakov 5. ročníka ZŠ 2017/2018. (2018, January). Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//46/testovanie_5_2017/vysledky/Prezent%C3%A1cia_vysledky_T5-2017_final_0102.pdf

Beaton, A. E., Mullis, I. V., Martin, M. O., Gonzalez, E. J., Kelly, D. L., & Smith, T. A. (1996). *Mathematics achievement in the middle school years: Iea's third international mathematics and science study*. Center for the Study of Testing, Evaluation, és Educational Policy, Boston College. Retrieved October 20, 2018, from https://timssandpirls.bc.edu/timss1995i/TIMSSPDF/BMathAll.pdf

Borcherds, M. (2014, December 2). Automatic checking example. Retrieved March 21, 2019, from https://www.geogebra.org/material/show/id/qjacSmTP

Bukor, J., Csiba, P., Fehér, Z., & Jaruska, L. (2012). Aplikácia geogebry v rôznych oblastiach. In *Geogebra v praxi* (pp. 32–113). Komárno: Univerzita J. Selyeho.

Certifikált mérés matematikai feladatlapja – Certifikačný test z matematiky T9-2017. (2010). Celoslovenské testovanie žiakov 9. ročníka zš. (2010). Retrieved January 29, 2019, from https://www.nucem.sk/dl/1341/Mat-MJ-fA.pdf

Certifikált mérés matematikai feladatlapja – Certifikačný test z matematiky T9-2018. (2018). Celoslovenské testovanie žiakov 9. ročníka zš. (2018). Retrieved January 29, 2019, from https://www.nucem.sk/dl/829/ZAK17019_S_CTZ-RT-Mat-MJ-fA_6226.pdf

Csiba, P. (2008a). Nové aspekty a možnosti vo vyučovaní matematiky. In *Infomat 2008: Zborník príspevkov i. vedeckej konferencie s medzinárodnou účasťou* (pp. 58–63). Trenčín: Trenčianska univerzita Alexandra Dubčeka v Trenčíne.

Csiba, P. (2008b). Tvorba interaktívnych matematických www stránok pomocou softvéru geogebra. In *Acta mathematica 11* (pp. 55–60). Nitra: UKF v Nitre.

Csiba, P. (2009). O vyučovaní matematiky na prelome tretieho tisícročia. In *Zborník z i. medzinárodnej vedeckej konferencie univerzity j. selyeho* (pp. 38–42). Komárno: Univerzita J. Selyeho.

Csiba, P. (2013). Ťažkosti a výzvy vyučovania geometrie pomocou softvéru geogebra. In *Zborník medzinárodnej vedeckej konferencie univerzity j. selyeho - 2013* (pp. 421–424). Komárno: Univerzita J. Selyeho.

Csiba, P. (2018a). Automatikusan kiértékelődő geometriai feladatok készítése. In *A selye jános egyetem 2018-as 10. nemzetközi tudományos konferenciájának tanulmánykötete: Web-alapú alkalmazások az oktatásban szekció* (pp. 8–12). Komárno: A Selye János Egyetem, Komárom.

Csiba, P. (2018b). Automatikusan kiértékelődő online tesztek matematikából. In *A magyar tannyelvű tanítóképző kar tudományos konferenciáinak tanulmánygyűjteménye* (pp. 348–353). Szabadka: Újvidéki Egyetem, Magyar Tannyelvű Tanítóképző Kar, Szabadka.

Dienes, Z. P. (2015). *Építsük fel a matematikát.* Budapest: SHL Hungary, Edge 2000 Kft.

Érettségi vizsga 2018-Extern rész, Matematika. (2018). Retrieved January 29, 2019, from https://www.nucem.sk/dl/766/RT_MAT_7472_2018_mj.pdf

Externá časť maturitnej skúšky v školskom roku 2017/2018-Výsledky. (2018). Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//25/maturita_2018/vysledky_spravy/Prezentacia_MS-2018_final.pdf

Ferencová, J., Stovíčková, J., & Galádová, A. (Eds.). (2015). *Národné správa pisa 2012.* Bratislava: Národný ústav certifikovaných meraní vzdelávania. Retrieved October 20, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//27/medzinarodne_merania/pisa/publikacie_a_diseminacia/1_narodne_spravy/N%C3%A1rodn%C3%A1_spr%C3%A1va_PISA_2012.pdf

Ficek, T., Ficová, L., Kurajová Stopková, J., & Repovský, M. (2017). Maturitná skúška 2017, správa o výsledkoch riadneho termínu externej časti maturitnej skúšky z matematiky. Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//25/maturita_2017/vysledky_spravy/E%C4%8C_MS_2017_MAT_final.pdf

Galádová, A., Gallová, S., Katreniaková, E., Kelemen, Z., & Stovíčková, J. (2013). *Trendy úrovne kľúčových kompetencií žiakov 4. ročníka základných škôl: Národná správa z medzinárodných výskumov pirls 2011 - čitateľská gramotnosť a timss 2011 - matematika a prírodné vedy.* Bratislava: Národný ústav certifikovaných meraní vzdelávania. Retrieved October 20, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//27/medzinarodne_merania/timss/publikacie/20131015_Klucove_kompetencie_web.pdf

Gergelitsová, Š. & Holan, T. (2012). An automatic evaluation of construction geometry assignments. In *21st century learning for 21st century skills - 7th european conference of technology enhanced learning, EC-TEL 2012, saarbrücken, germany, september 18-21, 2012. proceedings* (pp. 447–452). doi:10.1007/978-3-642-33263-0_41

Gergelitsová, Š. & Holan, T. (2016). Geotest — a system for the automatic evaluation of geometry-based problems. *Computer Applications in Engineering Education*, *24*(2), 297–304. doi:10.1002/cae.21712

Gunčaga, J. (2004). K propedeutike pojmu derivácia. In *Zborník konferencie žilinská didaktická konferencia.* Žilina: FPV, Žilinská Univerzita.

Hajdúk, M., Kelecsényi, P., & Ringlerová, V. (2013). Maturitná skúška 2013, správa o výsledkoch externej časti maturitnej skúšky z matematiky. Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//25/maturita_2013/vysledky_analyzy/SPRAVA_RT_EC_MS_2013_matematika_%282%29.pdf

Hajdúk, M., Kelecsényi, P., & Ringlerová, V. (2015). Maturitná skúška 2015, správa o výsledkoch riadneho termínu externej časti maturitnej skúšky z matematiky. Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//25/maturita_2015/vsledky_vyhodnotenia/Sprava_RT_EC_MS_2015_matematika_14102015.pdf

Hauser, J. (2007, November). Monitor 9-2007: Správa o priebehu a výsledkoch testovania žiakov 9. ročníka základnej školy. Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//26/monitor_9___2007/sprava_monitor9_2007.pdf

Hauser, J. (2008, November). Správa o priebehu a výsledkoch testovania žiakov deviatych ročníkov (k i. časti testovania žiakov 9. ročníkov zš) v školskom roku 2007/2008. Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//26/testovanie_9___2008/spravaM9_08.pdf

Hejný, M., Bálint, Ľ., Benešová, M., Bereková, H., Bero, P., Frantíková, Ľ., . . . Vantuch, J. (1988). *Teória vyučovania matematiky 2.* Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo.

Jelemenská, P. (2008). *Výkony žiakov 4. ročníka základnej školy v matematike a v prírodovedných predmetoch: Národná správa zo štúdie timss 2007*. Bratislava: Štátny pedagogický ústav. Retrieved October 20, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//27/medzinarodne_merania/timss/publikacie/N%C3%A1rodn%C3%A1_spr%C3%A1va_web.pdf

Juščáková, Z. (2008). Externá časť maturitnej skúšky 2008, záverečná správa zo štatistického spracovania testu matematiky úroveň b. Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//25/maturita_2008/2008_ma_b.pdf

Juščáková, Z. & Kelecsényi, P. (2010). Maturitná skúška 2010, správa o výsledkoch externej časti maturitnej skúšky, matematika. Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//25/maturita_2010/vysledky_a_analyzy/sprava_MAT_MS2010-pdf

Juščáková, Z. & Kelecsényi, P. (2011). Maturitná skúška 2011, správa o výsledkoch externej časti maturitnej skúšky, matematika. Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//25/maturita_2011/vysledky__analyzy/Spr%C3%A1va_o_v%C3%BDsledkoch_E%C4%8C_MS_2011_matematika_fin.pdf

Juščáková, Z. & Kelecsényi, P. (2012). Maturitná skúška 2012, správa o výsledkoch externej časti maturitnej skúšky, matematika. Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//25/maturita_2011/vysledky__analyzy/Spr%C3%A1va_o_v%C3%BDsledkoch_E%C4%8C_MS_2011_matematika_fin.pdf

Juščáková, Z., Kelecsényi, P., & Pichaničová, I. (2009). Maturitná skúška 2009, správa o výsledkoch externej časti maturitnej skúšky, matematika. Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//25/maturita_2009/vysledky_a_vyhodnotenie/Sprava_EC_MS_2009_MA.pdf

Khernová, V., Košinárová, T., & Bolemant, L. (2018, September). Testovanie 9-2018-priebeh, výsledky a analýzy. Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//26/testovanie_9_2018/vysledky/Sprava_T9-2018_FIN.pdf

Kimberling, C. (1988). *Triangle centers and central triangles* (Vols. 129). Congressus numerantium. Winnipeg: Utilitas Mathematica Publishing.

Koršňáková, P. (2004). *Pisa sk 2003, národné správa: Učíme sa pre budúcnosť*. Bratislava: Štátny pedagogický ústav. Retrieved October 20, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//27/medzinarodne_merania/pisa/publikacie_a_diseminacia/1_narodne_spravy/N%C3%A1rodn%C3%A1_spr%C3%A1va_PISA_2003.pdf

Koršňáková, P. & Kováčová, J. (Eds.). (2004). *Pisa slovensko 2006, národné správa*. Bratislava: Štátny pedagogický ústav. Retrieved October 20, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//27/medzinarodne_merania/pisa/publikacie_a_diseminacia/1_narodne_spravy/N%C3%A1rodn%C3%A1_spr%C3%A1va_PISA_2006.pdf

Koršňáková, P., Kováčová, J., & Heldová, D. (2010). *Pisa 2009 slovensko, národné správa*. Bratislava: Národný ústav certifikovaných meraní vzdelávania. Retrieved October 20, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//27/medzinarodne_merania/pisa/publikacie_a_diseminacia/1_narodne_spravy/N%C3%A1rodn%C3%A1_spr%C3%A1va_PISA_2009.pdf

Kuraj, J. & Kurajová Stopková, J. (2006). *Trendy v medzinárodnom výskume matematiky a prírodovedeckých predmetov*. Bratislava: Štátny pedagogický ústav. Retrieved October 20, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//27/medzinarodne_merania/timss/publikacie/Kuraj-Stopkova_Narodna_sprava_TIMSS2003.pdf

Kurajová Stopková, J. (2006). Externá časť maturitnej skúšky 2006, záverečná správa zo štatistického spracovania testu matematiky úroveň a. Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//25/maturita_2006/MA_06.pdf

Kuzma, J. (2005). Správa monitor 9, 2005. Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//26/monitor_9___2005/sprava_monitor9_2005.pdf

Kuzma, J. (2006, September). Správa z celoplošného monitorovania žiakov 9. ročníka zš monitor 9-2006. Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//26/monitor_9___2006/sprava_monitor9_2006.pdf

Matematikai feladatlap – Test z matematiky T5-2013. (2013). Pilotné testovanie žiakov 5. ročníka zš. (2013). Retrieved January 29, 2019, from https://www.nucem.sk/dl/2918/T5-2013_Test_z_matematiky_v_madarskom_jazyku_A.pdf

Matematikai feladatlap – Test z matematiky T5-2017. (2017). Celoslovenské testovanie žiakov 5. ročníka zš. (2017). Retrieved January 29, 2019, from https://www.nucem.sk/dl/2814/T5_2017_Test_z_matematiky_MJ.pdf

Maturita 2010, Externá časť, Matematika. (2010). Retrieved January 29, 2019, from https://www.nucem.sk/dl/2238/3504-MA.pdf

Mérő, L. (2013). *Észjárások-remix*. Budapest: Tericum.

Miklovičová, J., Galádová, A., Valovič, J., & Gondžúrová, K. (Eds.). (2017). *Národné správa pisa 2015*. Bratislava: Národný ústav certifikovaných meraní vzdelávania. Retrieved October 20, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//27//NS_PISA_2015.pdf

Mullis, I. V., Martin, M. O., Beaton, A. E., Gonzalez, E. J., Kelly, D. L., & Smith, T. A. (1997). *Mathematics achievement in the primary school years: Iea's third international mathematics and science study*. Center for the Study of Testing, Evaluation, és Educational Policy, Boston College. Retrieved October 20, 2018, from https://timssandpirls.bc.edu/timss1995i/TIMSSPDF/amtimss.pdf

Mullis, I. V., Martin, M. O., & Foy, P. (2005). *Timss 2003 international mathematics report*. TIMSS és PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College. Retrieved October 20, 2018, from https://timssandpirls.bc.edu/PDF/t03_download/T03MCOGDRPT.pdf

Mullis, I. V., Martin, M. O., Foy, P. i. c. w., Olson, J. F., Preuschoff, C., Erberber, E., … Galia, J. (2008). *Timss 2007 international mathematics report: Findings from iea's trends in international mathematics and science study at the fourth and eighth grades*. TIMSS és PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College. Retrieved October 20, 2018, from https://timssandpirls.bc.edu/TIMSS2007/PDF/TIMSS2007_InternationalMathematicsReport.pdf

Mullis, I. V., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). *Timss 2011 international report in mathematics*. TIMSS és PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College. Retrieved October 20, 2018, from https://timssandpirls.bc.edu/timss2011/downloads/T11_IR_Mathematics_FullBook.pdf

Mullis, I. V., Martin, M. O., Foy, P., & Hooper, M. (n.d.). *Timss 2015 international report in mathematics*. TIMSS és PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College. Retrieved October 20, 2018, from http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-results/wp-content/uploads/filebase/full%20pdfs/T15-International-Results-in-Mathematics.pdf

Mullis, I. V., Martin, M. O., Gonzalez, E. J., Gregory, K. D., Garden, R. A., O'Connor, K. M., … Smith, T. A. (2000). *Timss 1999 international mathematics report*. International Study Center, Lynch School of Education, Boston College. Retrieved October 20, 2018, from https://timssandpirls.bc.edu/timss1999i/math_achievement_report.html

Správa o priebehu a výsledkoch externej časti a písomnej formy internej časti maturitnej skúšky v školskom roku 2013/2014. (2014, September). Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//25/maturita_2014/vysledky_vyhodnotenia/Sprava_o_E%C4%8C_a_PFI%C4%8C_MS_2014_final3.pdf

Správa o priebehu a výsledkoch externej časti a písomnej formy internej časti maturitnej skúšky v školskom roku 2015/2016. (2016, September). Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//25/maturita_2016/vysledky_spravy/Sprava_o_E%C4%8C_a_PFI%C4%8C_MS_2016_fin.pdf

Správa o priebehu a výsledkoch externej časti a písomnej formy internej časti maturitnej skúšky v školskom roku 2013/2014. (2017, September). Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//25/maturita_2017/vysledky_spravy/Sprava_o_E%C4%8C_a_PFI%C4%8C_MS_2017_final.pdf

Správa o priebehu a výsledkoch externej časti a písomnej formy internej časti maturitnej skúšky v školskom roku 2014/2015. (2015, September). Retrieved October 16, 2018, from http:

//www.nucem.sk/documents//25/maturita_2015/vsledky_vyhodnotenia/Sprava_o_EC_a_PFIC_MS_2015_final2.pdf

Pichaničová, I. (2008). Testovanie žiakov 9. ročníka zš v školskom roku 2007/2008 - ii. časť čitateľská a jazyková gramotnosť matematická gramotnosť. Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//26/testovanie_9___2008/Microsoft_Word_-_261108_Sprava_citatelska_jazykova_matematicka_gramotnost.pdf

Pilotné overovanie testovacích nástrojov pre Testovanie 5 v školskom roku 2012/2013. (2013). Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//46/tlacova_sprava_t5_2012/Spr%C3%A1va_z_pilotn%C3%A9hoTestovania_5-2012.pdf

Polgáryová, E. (2010a, June). Správa o priebehu a výsledkoch celoslovenského testovania žiakov 9. ročníka základných škôl v školskom roku 2009/2010. Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//26/testovanie_9_2010/Sprava_T9-2010-pdf

Polgáryová, E. (2010b, April). Výsledky a základné štatistické údaje z celoslovenského testovania žiakov 9. ročníka zš v školskom roku 2009/2010. Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//26/testovanie_9_2010/Vysledky_a_statistiky_T9_2010_final.pdf

Polgáryová, E. & Košinárová, T. (2013). Testovanie 9-2013, priebeh, výsledky a analýzy. Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//26/testovanie_9_2013/Sprava_T9_2013_v2.3.pdf

Polgáryová, E. & Košinárová, T. (2016, September). Testovanie 9-2016, priebeh, výsledky a analýzy. Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//26/testovanie_9_2016/SPRAVA_T_9-2016_final.pdf

Polgáryová, E., Košinárová, T., Bolemant, L., & Khernová, V. (2017, September). Testovanie 9-2017, priebeh, výsledky a analýzy. Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//26/testovanie_9_2017/Sprava_T9-2017_09_final.pdf

Polgáryová, E., Košinárová, T., & Mizerová, B. (2014). Testovanie 9-2014, priebeh, výsledky a analýzy. Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//26/testovanie_9_2014/Sprava_T9_FINAL_2.pdf

Polgáryová, E., Košinárová, T., Mizerová, B., & Bolemant, L. (2015). Testovanie 9-2015, priebeh, výsledky a analýzy. Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//26/testovanie_9_2015/Sprava-T-9-FINAL_2015.pdf

TESTOVANIE 9-2011, PRIEBEH, VÝSLEDKY A ANALÝZY. (2011, July). Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//26/testovanie_9_2011/Final_Spr%C3%A1va_T9-2011-pdf

Pólya, G. (1977). *A gondolkodás iskolája*. Budapest: Gondolat Kiadó.

Prodromou, T. & Lavicza, Z. (2017). Integrating technology into mathematics education in an entire educational system - reaching a critical mass of teachers and schools. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, *24*(3), 129–135.

Správa o priebehu a výsledkoch externej časti a písomnej formy internej časti maturitnej skúšky v školskom roku 2012/2013. (2013, September). Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//25/maturita_2011/vysledky__analyzy/Sprava_Maturita_2011__NUCEM_final.pdf

Repovský, M. & Juščáková, Z. (2016). Maturitná skúška 2016, správa o výsledkoch riadneho termínu externej časti maturitnej skúšky z matematiky. Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//25/maturita_2016/vysledky_spravy/MAT-Spr%C3%A1va_o_v%C3%BDsledkoch_E%C4%8C_MS_2016_fin.pdf

Ringlerová, V. (2007). Externá časť maturitnej skúšky 2007, záverečná správa zo štatistického spracovania testu matematiky úroveň a. Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//25/maturita_a_gs_2007/spravaMA07A.pdf

Ringlerová, V. (2008). Externá časť maturitnej skúšky 2008, záverečná správa zo štatistického spracovania testu matematiky úroveň a. Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//25/maturita_2008/2008_ma_a.pdf

Ringlerová, V. & Zelmanová, O. (2005a). Analýza úspešnosti, položiek a variantov testu z matematiky maa 2005, externá časť maturitnej skúšky. Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//25//MA2005.pdf

Ringlerová, V. & Zelmanová, O. (2005b). Analýza úspešnosti, položiek a variantov testu z matematiky mab 2005, externá časť maturitnej skúšky. Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//25//MB2005.pdf

Správa o priebehu a výsledkoch certifikačného testovania žiakov 9. ročníka základných škôl v školskom roku 2008/2009. (2009, June). Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//26//final_Sprava_09.pdf

Správa o priebehu a výsledkoch externej časti a písomnej formy internej časti maturitnej skúšky v školskom roku 2009/2010. (2010). Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//25/maturita_2010/vysledky_a_analyzy/Sprava_Maturita_2010__NUCEM_final.pdf

Správa o priebehu a výsledkoch externej časti a písomnej formy internej časti maturitnej skúšky v školskom roku 2010/2011. (2011, July). Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//25/maturita_2011/vysledky__analyzy/Sprava_Maturita_2011__NUCEM_final.pdf

Správa o priebehu a výsledkoch externej časti a písomnej formy internej časti maturitnej skúšky v školskom roku 2011/2012. (2012, July). Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//25/maturita_2012/vysledky_analyzy/Sprava_EC_a_PFIC_MS_2012.pdf

Stadlbauer, C. (2015, December 8). Moodle plugin tutorial. Retrieved March 21, 2019, from https://www.geogebra.org/m/LFe0HHB0

Strelková, E. (2008, June). Hodnotenie a interpretácia výsledkov testu externej časti maturitnej skúšky v šk. roku 2007/2008, matematika úroveň a a b. Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//25/maturita_2008/55oprava1-pdf

Testovanie 9-2014, Výsledky celoslovenského testovania žiakov 9. ročníka ZŠ 2013/2014. (2014, April). Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//26/testovanie_9_2014/T9_2014_prezentacia_final.pdf

Testovanie 9-2015, Výsledky celoslovenského testovania žiakov 9. ročníka ZŠ 2014/2015. (2015). Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//26/testovanie_9_2014/T9_2014_prezentacia_final.pdf

Testovanie 9-2016, Výsledky celoslovenského testovania žiakov 9. ročníka ZŠ 2015/2016. (2016). Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//26/testovanie_9_2016/SPRAVA_T_9-2016_final.pdf

Testovanie 9-2016, Výsledky celoslovenského testovania žiakov 9. ročníka ZŠ 2016/2017. (2017). Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//26/testovanie_9_2017/vysledky_t9_2017/Prezentacia_Vysledky_T9-2017.pdf

Testovanie 9-2018-Výsledky celoslovenského testovania žiakov 9. ročníka ZŠ 2017/2018. (2018). Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//26/testovanie_9_2016/SPRAVA_T_9-2016_final.pdf

Vaníček, J. (2010). *Využití informačních technologií ve výuce matematiky*. Výukový text (Cabri) k projektu Educa. Most: Genesia.

Velichová, D. & Kováčová, M. (2005). Engineering mathematics on the web. In *International conference: Virtual university* (pp. 101–106). Bratislava: FEI STU.

Vyhodnotenie externej časti a písomnej formy internej časti maturitnej skúšky v školskom roku 2008/2009. (2009). Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//25/maturita_2008/2008_ma_a.pdf

Vyhodnotenie externej časti maturitnej skúšky v školskom roku 2006/2007. (2007, June). Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//25/maturita_a_gs_2007/vyhodnotenie_ECMS2006_7.pdf

Výsledky a základné štatistické údaje z celoslovenského testovania žiakov 9. ročníka ZŠ v školskom roku 2008/2009. (2009, April). Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//26//final_Sprava_09.pdf

Výsledky celoslovenského testovania Testovanie 9-2012 žiakov 9. ročníka ZŠ v školskom roku 2011/2012. (2012). Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//26/testovanie_9_2012/vysledky/T9_2012_vyhodnotenie_pdf.pdf

Výsledky celoslovenského testovania žiakov 9. ročníka ZŠ 2012/2013. (2013, April). Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//26/testovanie_9_2013/vysledky/Vysledky_T9-2013_F.pdf

Výsledky maturitnej skúšky 2005. (2005). Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//25//Vysledky_MS_2005.pdf

Výsledky maturitnej skúšky 2006. (2006). Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//25/maturita_2006/statisticke_vysledky_M2006.pdf

Zelmanová, O. (2006). Externá časť maturitnej skúšky 2006, záverečná správa zo štatistického spracovania testu matematiky úroveň b. Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//25/maturita_2006/MB_06.pdf

Zelmanová, O. (2007). Externá časť maturitnej skúšky 2007, záverečná správa zo štatistického spracovania testu matematiky úroveň b. Retrieved October 16, 2018, from http://www.nucem.sk/documents//25/maturita_a_gs_2007/MA07Bsprava.pdf